Structures et algorithmes aléatoires
TD6

7 novembre 2014

Exercice 1 Chemins disjoints

Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté et soient (u_1,v_1), (u_2,v_2), ..., (u_n,v_n) des couples de sommets. Pour chaque $1 \le i \le n$ soit F_i un ensemble de m chemins de u_i vers v_i.

Supposons que chaque chemin dans F_i ne partage des arêtes qu'avec au plus k chemins de chaque F_j avec $i \neq j$. Montrer que si $8nk/m \le 1$, alors il existe $(P_1,\ldots,P_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que les chemins P_i ne partagent pas d'arêtes.

Exercice 2 Coloriage

Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté et supposons qu'à chaque sommet $v \in V$ est associé un ensemble $S(v)$ de $8r$ couleurs, $r \ge 1$. En outre, pour chaque sommet v et chaque couleur $c \in S(v)$, il y a au plus r voisins u de v tels que $c \in S(u)$.

Montrer qu'il existe alors un coloriage propre (pas deux sommets adjacents avec la même couleur) tel que pour tout v, la couleur associée à v est choisie dans $S(v)$.

Exercice 3 Ensembles indépendants dans le cycle

Trouver un c avec la propriété suivante : Soit $G = (V,E)$ le cycle de longueur cn et soit $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ une partition tel que $|V_i| = c$ pour tout i. Alors il existe un ensemble indépendant qui contient exactément un élément de chaque V_i.

Exercice 4 Routage de paquets

Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté et soient (u_1,v_1), (u_2,v_2), ..., (u_n,v_n) des couples de sommets. Pour chaque $1 \le i \le n$ soit P_i un chemin de u_i vers v_i.

On veut délivrer un message m_i de u_i à v_i suivant le chemin P_i pour chaque i. Pour cela, à chaque instant $t = 1,2,3,\ldots$, on peut décider pour chaque message m_i s'il reste au sommet actuel ou s'il est transferé au prochain sommet de P_i. On doit respecter la contrainte qu'à chaque instant t il y a au plus un message transferé sur chaque arête du graphe. Un tel ordonnancement des messages sera appelé un ordonnancemence *admissible*.

On introduit les paramètres de *congestion*

$$c = \max_{e \in E} |\{i \mid P_i \text{ contient l'arête } e\}|$$

et de *dilation*

$$d = \max_{1 \le i \le n} \ell(P_i)$$

où $\ell(P_i)$ est la longueur de P_i.

Sous l'hypothèse que $d \ge c$, on va montrer qu'il existe un ordonnancement admissible des messages en temps $O\big(d(1+\alpha)^{\log^* d}\big)$ où α est une constante et $\log^* d$ est le logarithme itéré.

1. Montrer que chaque ordonnancement admissible prend un temps de $\Omega(d)$ et qu'il existe un ordonnancement admissible en temps $O(d^2)$.

On considère l'ordonnancement (non nécessairement admissible) suivant : Pour chaque message m_i, on choisit un délai initial $\delta_i \in \{1,2,\ldots,\alpha d\}$. L'ordonnancement laisse le message m_i initialement à sa source u_i pendant temps δ_i et le transfère ensuite à chaque instant suivant son chemin P_i jusqu'à sa destination v_i.

2. Montrer qu'il existe des délais initiaux tels que chaque arête est utilisée au plus $\log d$ fois aux instants $1 \le t \le \log d$. Utiliser le lemme local avec les événements A_e = "l'arête e est utilisée au plus $\log d$ fois aux instants $1 \le t \le \log d$". Utiliser une borne de Chernoff pour borner $\mathbb{P}(A_e)$.
3. Expliquer comment cette construction peut être utilisée récursivement.
4. Conclure.