Structures et algorithmes aléatoires
TD5

5 novembre 2014

Exercice 1 Inégalité de Kraft

Soit F un ensemble fini de mots binaires tel que aucun mot dans F n'est préfixe d'un autre mot dans F. Montrer que

$$\sum_{k\geq 0} \frac{N_k}{2^k} \leq 1$$

où $N_k = |\{f \in F \mid \ell(f) = k\}|$ et $\ell(f)$ est la longueur du mot f.

Exercice 2 Inégalité de l'espérance conditionnelle

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(X_i = 1)}{\mathbb{E}(X \mid X_i = 1)} \quad .$$

Soit $Y = 1/X$ si $X \neq 0$ et $Y = 0$ sinon.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{E}(XY)$.
2. Utiliser l'inégalité de Jensen pour montrer que $\mathbb{E}(X_i Y) \geq \mathbb{P}(X_i = 1)/\mathbb{E}(X \mid X_i = 1)$.
3. Conclure.

Exercice 3 Nombre de triangles d'un graphe

On note $G_{n,p}$ l'espace probabilisé des graphes Erdős-Renyi à n sommets et de probabilité p pour chaque arête. Considérons un graphe de $G_{n,p}$ avec $p = 1/n$. Soit X son nombre de triangles.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq 1/6$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq 1) \geq 1/7$.

Exercice 4 Ensembles sans somme

On appelle un ensemble $A \subseteq \mathbb{Z}$ d'entiers *sans somme* s'il n'existe pas de triple $(a,b,c) \in A^3$ tel que $a + b = c$. On veut montrer que tout ensemble B d'entiers non nuls contient un ensemble $A \subseteq B$ sans somme tel que $|A| > |B|/3$.

Soit p un nombre premier de la forme $p = 3k + 2$ tel que $p > 2|b|$ pour tout $b \in B$. Posons $C = \{k+1, k+2, \ldots, 2k+1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\big(\exists c \in C : bX \equiv c \pmod p\big) > 1/3$ pour tout $b \in B$ si X est tiré uniformément entre 1 et $p - 1$.
2. Conclure.

Exercice 5 Sommes distinctes

Un ensemble A d'entiers est un ensemble *à sommes distinctes* si la somme $\sum_{a\in S} a$ est différente pour chaque partie S de A. Pour tout entier positif n, on définit $f(n)$ comme le cardinal maximal d'une partie à sommes distinctes de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Montrer que $f(n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ en donnant un exemple.
2. Montrer que $f(n) \leq \log_2 n + \log_2 \log_2 n + O(1)$ par un argument de comptage.

Le but du reste de l'exercise est d'améliorer le coéfficient du terme $\log_2 \log_2 n$ en montrant que

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1) \ .$$

Soit $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ à sommes distinctes. On pose $k = |A|$ et X une partie de A aléatoire uniforme.

3. Soit $\lambda > 1$. Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\mu - \sum_{a \in X} a\right| \geq \lambda n \sqrt{k}/2\right) \leq 1/\lambda^2$ où μ est l'espérance de $\sum_{a \in X} a$.
4. En déduire que
$$n \geq \frac{2^k (1 - 1/\lambda^2) - 1}{\sqrt{k} \lambda} \ .$$
5. Conclure.