Méthode du second moment et graphes aléatoires

Exercice 1 **Propriétés vraies pour presque tout graphe**

Soit Q une propriété. On dit que Q est vraie pour presque tout graphe dans un espace de probabilités Ω_n constitué des graphes à n sommets si

$$P(G \in \Omega_n \text{ tel que } G \text{ satisfait la propriété } Q) \to 1 \text{ quand } n \to \infty.$$

On prend $\Omega_n = \mathcal{G}(n,p)$ et on suppose $0 < p < 1$ fixé.

1. Soit $1 \leq h \leq k$ deux entiers naturels. Montrer que presque tout graphe $G_{n,p} = (V, E)$ de $\mathcal{G}(n,p)$ satisfait la propriété suivante :

pour toute suite de k sommets $x_1, \ldots, x_k$, il existe un sommet x tel que $xx_i \in E$ pour tout $1 \leq i \leq h$ et $xx_i \notin E$ pour tout $h < i \leq k$.

2. En déduire que les propriétés suivantes sont vraies pour presque tout graphe :

— presque tout graphe $G_{n,p}$ a un diamètre de 2 ;
— pour un entier k fixé, un graphe $G_{n,p}$ est de degré minimal au moins k.

Exercice 2 **Inégalité de l'espérance conditionnelle**

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$. On veut montrer que

$$P(X > 0) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{P(X_i = 1)}{E(X \mid X_i = 1)}.$$

Soit $Y = 1/X$ si $X \neq 0$ et $Y = 0$ sinon.

1. Montrer que $P(X > 0) = E(XY)$.

2. Montrer que $E(X_i Y) \geq \frac{P(X_i=1)}{E(X \mid X_i=1)}$. On pourra utiliser le fait que $1/x$ est convexe et l'inégalité de Jensen.

3. Conclure.

Exercice 3 **Nombre de triangles d'un graphe**

On note $G_{n,p}$ l'espace probabilisé des graphes Erdös-Renyi à n somments et de probabilité p pour chaque arête. Considérons un graphe de $G_{n,p}$ avec $p = 1/n$. Soit X son nombre de triangles.

1. Montrer que $P(X \geq 1) \leq 1/6$.

2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(X \geq 1) \geq 1/7$. *Indication :* Utiliser l'exercice précédent

Exercice 4 **Graphes d'Erdös-Rényi avec m arêtes**

Les graphes aléatoires furent initialement introduits sous la forme $\mathcal{G}(n,m)$, la mesure uniforme sur l'ensemble des graphes à n sommets et m arêtes.

1. Montrer qu'un graphe peut être tiré selon $\mathcal{G}(n,m)$ de la manière suivante : en partant d'un graphe à n sommets sans aucune arête, on rajoute successivement m arêtes, chacune étant distribuée uniformément parmi les arêtes "manquantes".

2. Montrer qu'un graphe tiré selon $G_{n,p}$ conditionné à avoir m arêtes est distribué selon $\mathcal{G}(n,m)$.

Exercice 5 **Sommes distinctes**

Un ensemble A d'entiers est un ensemble *à sommes distinctes* si la somme $\sum_{a \in S} a$ est différente pour chaque partie S de A. Pour tout entier positif n, on définit $f(n)$ comme le cardinal maximal d'une partie à sommes distinctes de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Montrer que $f(n) \geq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ en donnant un exemple.

2. Montrer que $f(n) \leq \log_2 n + \log_2 \log_2 n + O(1)$ par un argument de comptage.

Le but du reste de l'exercice est d'améliorer le coefficient du terme $\log_2 \log_2 n$ en montrant que

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1) \ .$$

Soit $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ à sommes distinctes. On pose $k = |A|$, S une partie de A tirée uniformément au hasard, et $X_S = \sum_{a \in S} a$.

3. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $P(|X_S - \mathbb{E}X_S| < \lambda) \geq 1 - \frac{n^2 k}{4\lambda^2}$.

4. Justifier que $P(|X_S - \mathbb{E}X_S| < \lambda) \leq \frac{2\lambda+1}{2^k}$.

5. Conclure.

Exercice 6 **Taille maximale d'une clique dans presque tout graphe**

On va montrer dans cet exercice que la taille maximum d'une clique ne peut prendre que deux valeurs dans presque tout graphe de $\mathcal{G}(n,p)$. Soit X_r le nombre de cliques de taille r dans un graphe de de $\mathcal{G}(n,p)$.

1. Quel est l'espérance de X_r ?

On note $d = d(n,p)$ le plus grand entier tel que $E(X_d) \geq \ln n$. On suppose p fixé.

2. Montrer que $P(X_{d+2} > 0) \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Montrer que $d \approx 2 \ln n / \ln p^{-1}$.

4. Calculer la variance de X_d. En déduire que $P(X_d > 0) \to 1$ quand $n \to \infty$.

5. Conclure quant à la taille maximale d'une clique de presque tout graphe de $\mathcal{G}(n,p)$.