Structures et algorithmes aléatoires
TD2

9 octobre 2015

Exercice 1 Balles et urnes

On lance n balles dans n urnes. Chaque balle atterrit dans une urne de manière uniforme et indépendamment des autres balles.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement une urne soit vide ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une urne soit vide ?

Exercice 2 Points fixes d'une permutation

Quelles est l'espérance du nombre de points fixes d'une permutation sur $\{1,\dots,n\}$ pour une distribution uniforme des permutations ?

Exercice 3 Maximum et minimum

On jète deux dés non biaisés à k faces numérotées $1,2,\dots,k$. Dénotons les résultats des dés par X_1 et X_2.

1. Quelles sont les espérances de $\max\{X_1,X_2\}$ et $\min\{X_1,X_2\}$?
2. Montrer l'égalité $\mathbb{E}\big(\max\{X_1,X_2\}\big)+\mathbb{E}\big(\min\{X_1,X_2\}\big)=\mathbb{E}X_1+\mathbb{E}X_2$ en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 4 Inégalité de Jensen

Soit U un intervalle réel. Une fonction $f: U \to \mathbb{R}$ est convexe si elle satisfait $f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) \le (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)$ pour tout $a,b \in U$ et $\lambda \in [0,1]$.

Soit X une variable aléatoire sur U et f une fonction convexe sur U. Montrer que $f(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}f(X)$ si les deux espérances existent.

Exercice 5 Inégalité de l'espérance conditionnelle

Soit $X=\sum_{i=1}^n X_i$, où les X_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}(X>0) \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(X_i=1)}{\mathbb{E}(X \mid X_i=1)} \quad .$$

Soit $Y=1/X$ si $X \neq 0$ et $Y=0$ sinon.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X>0)=\mathbb{E}(XY)$.
2. Utiliser l'inégalité de Jensen pour montrer que $\mathbb{E}(X_iY) \ge \mathbb{P}(X_i=1)/\mathbb{E}(X \mid X_i=1)$.
3. Conclure.

Exercice 6 Coupe d'un graphe

Soit $G=(V,E)$ un graphe non-orienté. Une coupe de G est une partition des sommets en A et B, deux ensembles disjoints. La valeur d'une coupe $C(A,B)$ est le nombre d'arêtes reliant un sommet de A à un sommet de B. Le problème de trouver une coupe de valeur maximale est NP-difficile, et nous allons donner un algorithme construisant un coupe de valeur $\ge |E|/2$. On pose $|E|=m$.

1. On construit A et B aléatoirement, en affectant indépendamment et uniformément à chaque sommet un des deux ensembles A ou B. Quelle est la probabilité qu'une arête appartienne à la coupe ? En déduire qu'il existe une coupe de valeur $\geq m/2$.
2. Montrer que
$$P(C(A,B) \geq m/2) \geq \frac{1}{m+1}.$$
Quel est le nombre d'essais à faire avant de trouver une coupe de valeur $\geq m/2$? En déduire un algorithme aléatoire probabiliste pour trouver une coupe de valeur $\geq m/2$.

Exercice 7 Tri rapide

On rappelle l'algorithme du tri rapide :

Données: Une liste S de n entiers distinct
Résultat: La liste triée des éléments de S
début
  si *S a 0 ou 1 élément* **alors** retourner S **sinon**
    Choisir un élément x (pivot) de S et diviser les autres éléments en deux sous-listes
    – S_1, liste des éléments de S qui sont $< x$;
    – S_2, liste des éléments de S qui sont $> x$;
    Tri_Rapide($S1$) ; Tri_rapide(S_2);
    Retourner la liste S_1, x, S_2.
  fin
fin

Algorithm 1: Tri_Rapide

On veut montrer que si les pivots sont choisis indépendamment et uniformément, alors l'espérance du nombre de comparaisons est de $2n \ln n + O(n)$. On note $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ les éléments de la liste.

1. Donner un exemple de liste qui nécessite $\Omega(n^2)$ comparaisons pour la trier avec cet algorithme.
2. Quelle est la probabilité que deux éléments y_i at y_j soient comparés ?
3. En déduire le résultat.
4. Que se passe-t-il si on choisit toujours le premier élément de la liste comme pivot ? Quelle est la différence avec le choix d'un pivot aléatoire ?

Exercice 8 Recrutement

On dispose d'un ensemble de n candidats pour un poste. Les candidats sont examinés dans un ordre aléatoire uniforme parmi $n!$ ordres possibles. A la fin de chaque entretien, on peut soit proposer le poste au candidat actuel et arreter le processus de recrutement, soit rejeter le candidat sans possibilité de revenir en arrière. Supposons la strategie suivante : on passe d'abord l'entretien de m premiers candidats, sans leur proposer le poste. Après cette étape, on propose le poste au premier candidat qui est superieur à tous les candidats examinés précédemment. Quelle est la probabilité que le meilleur candidat soit choisi ?