Chaînes de Markov

Exercice 1 — Chaînes transitoires

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en temps discret avec un espace d'état infini dénombrable. On suppose de plus que le graphe de transition de X_n admet une seule classe finale irréductible, qui ne contient qu'un nombre fini d'états. L'ensemble des états transitoires est noté A.

1. Expliquer comment mettre la matrice de transition de X_n sous forme triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}.$$

Expliquer pourquoi dans un tel cas, le comportement asymptotique n'est pas nécessairement unique. Donner tous les comportements possibles, *a priori*.

2. Pour tout $i \in A$, on définit les probabilités $v(i) = P(X_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} | X_0 = i)$ et $v_n(i) = P(X_1 \in A, \ldots, X_n \in A | X_0 = i)$. Montrer que $v_n \downarrow v$ et donner une formule du vecteur de taille infinie v_n en fonction de Q^n.

3. Montrer que $v = Qv$.

4. Montrer que v est la plus grande solution de l'équation en u, $u = Qu$ qui vérifie $0 \leq u(i) \leq 1$ pour tout i dans A.

5. Montrer que soit $v(i) = 0, \forall i \in A$, soit $\sup_{i\in A} v(i) = 1$.
Donner un exemple d'une chaîne telle que $v = 0$ et d'une autre telle que $\sup_{i\in A} v(i) = 1$.

Exercice 2 — Simulation d'une file d'attente à capacité finie

Considérons une file d'attente de capacité M qui sert un client par unité de temps. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la distribution du nombre de clients arrivant pendant chaque unité de temps (indépendamment des arrivées précédentes).

1. Donner une chaîne de Markov associée à cette file. Quelles sont les hypothèses à faire pour que la chaîne soit irréductible et apériodique ?

2. Montrer que l'on peut trouver une représentation fonctionnelle $X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_n)$ croissante, c'est-à-dire que $x \geq y \Rightarrow \forall e,\ f(x,e) \geq f(y,e)$.

3. On veut simuler cette chaîne de Markov par l'algorithme de Propp et Wilson. Montrer qu'on a en fait besoin de simuler uniquement les trajectoires à partir de deux états.

Exercice 3 — Coloriage et temps de mélange

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et C un ensemble de couleurs. On note Δ le degré maximal du graphe, et l'on souhaite générer un coloriage propre des sommets de manière aléatoire et uniforme parmi tous les coloriages propres du graphe par des techniques de simulation de chaînes de Markov Monte-Carlo. On rappelle qu'un coloriage propre est un coloriage des sommets tels que deux sommets voisins ne sont pas de la même couleur. Plus formellement, un coloriage est une fonction $c : V \to C$ tel que $c(u) = c(v) \Rightarrow \{u, v\} \notin E$.

1. Proposer une fonction de représentation d'une chaîne de Markov irréductible apériodique, récurrente positive et réversible dont la distribution stationnaire est la distribution uniforme sur tous les coloriages propres. Combien de couleurs sont nécessaires pour que cette chaîne soit vraiment irréductible ?

On suppose que $|C| \geq 4\Delta + 1$ et on veut montrer qu'alors $\tau(\epsilon)$, le temps de mélange de la chaîne, satisfait

$$\tau(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{|C|}{|C| - 4\Delta} |V| \ln \frac{|V|}{\epsilon} \right\rceil .$$

Pour se faire, on construit un couplage de la chaîne définie à la question précédente.

2. Proposer un couplage (X_n^1, X_n^2).

On note D_n l'ensemble des sommets coloriés différemment entre X_n^1 et X_n^2 et $d_n = |D_n|$.

3. Donner une borne inférieure en fonction de d_n pour $\mathbb{P}(d_{n+1} = d_n - 1 \mid d_n > 0)$ et une borne supérieure pour $\mathbb{P}(d_{n+1} = d_n + 1 \mid d_n > 0)$.

4. En déduire une borne supérieure pour $\mathbb{E}[d_{n+1} \mid d_n]$ et donc que

$$\mathbb{E}[d_n] \leq |V| \left(1 - \frac{|C| - 4\Delta}{|V||C|}\right)^n .$$

5. Conclure quant au temps de mélange de la chaîne.

`Exercice 4` `Coloriage et chaîne bornante`

On considère la chaîne de Markov suivante sur l'ensemble des coloriages d'un graphe $G = (V, E)$: $X_0 \in C^V$ est un coloriage du graphe G, où C est l'ensemble des couleurs autorisées ; X_{t+1} est défini en tirant un sommet $v \in V$ uniformément au hasard, puis en lui assignant une nouvelle couleur uniformément au hasard parmi les couleurs de C non utilisées par les voisins de v.

On s'intéresse à une seconde chaîne de Markov, $\{Y_t\}$, qui évolue sur l'ensemble des sous-ensembles de C^V. On définit $Y_0 = C^V$, et on construit Y_{t+1} de la manière suivante : on choisit un sommet $v \in V$ uniformément au hasard et on pose $Y_{t+1}(v) = \varnothing$; on tire ensuite une couleur $c \in C$ au hasard et on la rajoute à $Y_{t+1}(v)$ si $Y_t(u) \neq \{c\}$ pour tous les voisins u de v ; on itère cette dernière étape jusqu'à ce que $c \notin \cup_{u \in \mathcal{N}(v)} Y_t(u)$ ou $|Y_{t+1}(v)| > \Delta$, où Δ est le degré maximum des sommets du graphe G.

1. Montrer que $\{Y_t\}$ est bornante pour $\{X_t\}$ au sens où il existe un couplage (X_t, Y_t) tel que si, $\forall v \in V$, $X_0(v) \in Y_0(v)$, alors pour tout $t \in \mathbb{N}$ on a, $\forall v \in V$, $X_t(v) \in Y_t(v)$.

2. Que se passe-t-il quand $\prod_{v \in V} |Y_t(v)| = 1$?

On suppose que $|C| = k \geq \Delta(\Delta + 2)$.

3. Montrer que le temps $\tau'(\epsilon)$ au-delà duquel $\prod_{v \in V} |Y_t(v)| = 1$ avec probabilité au moins $1 - \epsilon$ vérifie

$$\tau'(\epsilon) \leq \left\lceil \frac{k - \Delta + 1}{k + 1 - \Delta(\Delta + 2)} |V| \ln \frac{|V|}{\epsilon} \right\rceil .$$