

Structures et algorithmes aléatoires

TD12

8 janvier 2015

Exercice 1 Critère de réversibilité de Kolmogorov

On considère une chaîne de Markov sur l'espace d'états fini S , irréductible et apériodique, décrite par la matrice de transition P . On dit qu'un circuit $(i_1, \dots, i_n, i_1)$, $i_1, \dots, i_n \in S$, vérifie le critère de Kolmogorov si $P_{i_1, i_2} \dots P_{i_n, i_1} = P_{i_n, i_{n-1}} \dots P_{i_1, i_n}$. Montrer que la chaîne de Markov est réversible si et seulement si le critère de Kolmogorov est vérifié pour tous les circuits dans le graphe de transition de la chaîne.

Exercice 2 Ensembles indépendants de taille fixe

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. On veut générer un ensemble indépendant de taille k de manière uniforme. C'est un problème difficile qui n'a pas de solution efficace à ce jour.

La chaîne de Markov est décrite par l'échantillonneur de Gibbs suivant :

1. Choisir $v \in X_n$ et $w \in V$ uniformément ;
2. Si $X_n \cup \{v\} \setminus \{w\}$ est un indépendant de taille k , alors $X_{n+1} = X_n \cup \{v\} \setminus \{w\}$. Sinon $X_{n+1} = X_n$.

1. Cette chaîne est-elle apériodique ?

Soit Δ le degré maximum d'un sommet. On suppose par la suite que :

$$k \leq \frac{|V|}{3(\Delta + 1)}. \quad (1)$$

2. Montrer que la chaîne est irréductible sous cette condition.
3. Montrer que la distribution stationnaire est bien la distribution uniforme sur tous les ensembles indépendants de taille k .

Soient (X_n) et (Y_n) deux chaînes de Markov sur les ensembles indépendants de taille k selon l'échantillonneur de Gibbs ci-dessus. On définit le couplage suivant :

1. Choisir le même $w \in V$ dans les deux chaînes ;
2. Choisir $v \in X_n$ uniformément dans X_n . Si $v \in Y_n$ alors on choisit le même $v' = v$. Sinon, on choisit v' uniformément dans $Y_n \setminus X_n$.
4. Montrer que le choix de v' est uniforme.

On s'intéresse maintenant au temps de couplage. Pour cela, on va étudier la quantité $d_n = |X_n - Y_n|$. Il y a couplage quand $d_n = 0$.

5. Décrire l'évolution possible de d_{n+1} en fonction de d_n (les valeurs possibles et les probabilités correspondantes).
6. Montrer que

$$E[d_{n+1} | d_n = \ell] \leq \ell \left(1 - \frac{|V| - 3(\Delta + 1)(k + 1)}{|V|k} \right).$$

7. Montrer que

$$E[d_n] \leq k e^{-n \left(\frac{|V| - 3(\Delta + 1)(k + 1)}{|V|k} \right)}.$$

8. En déduire une borne supérieure pour le temps de mélange.

Exercice 3 Chaîne de Metropolis

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états fini E . Le but de cet exercice est de modifier les probabilités de transition de $\{X_n\}$ de telle sorte que la distribution stationnaire soit une distribution π donnée (on ne connaît pas la distribution de la chaîne initiale) et la chaîne obtenue réversible.

Pour ce faire, on passe d'un état à l'autre de la manière suivante. Si au temps n , la chaîne est dans l'état x , on tire l'état y selon les probabilités de transition de la chaîne, et à l'instant $n+1$, on va dans l'état y avec probabilité $a(x, y)$ et avec probabilité $1 - a(x, y)$, on reste dans l'état x .

1. Donner les probabilités de transition de la chaîne de Markov obtenue.
2. Si l'on veut obtenir une chaîne de probabilité stationnaire π , comment peut-on choisir les $a(x, y)$ de manière à les maximiser ?
3. Soit G un graphe non-orienté, que l'on ne connaît pas dans son ensemble, mais que l'on peut parcourir en se déplaçant de proche en proche sur ses sommets. Quand un sommet est visité, on connaît ses voisins, et on peut donc effectuer une marche aléatoire sur les graphes. On désire un échantillon uniforme des sommets, c'est-à-dire, définir une marche aléatoire qui a une distribution uniforme sur ce graphe. Comment faire ?

Soit $f : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on veut trouver le maximum. Soit G un graphe d -régulier connexe sur $\{1, 2, \dots, N\}$ et soit Q sa matrice de transition.

4. Donner la matrice de transition de la chaîne de Metropolis si on pose $\pi_i = \lambda^{f(i)}/Z$ où Z est le facteur de normalisation et $\lambda \geq 1$.
5. Calculer la limite de π quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Exercice 4 Coloriage d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté et C un ensemble de couleurs. Un coloriage est une fonction de V vers C et est dit admissible si deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Décrire et comparer la chaîne de Metropolis avec celle de l'échantillonneur de Gibbs pour la distribution π uniforme sur tous les coloriages admissibles.