# Structures et algorithmes aléatoires
# TD11

12 décembre 2014

## Exercice 1 Chaîne de Metropolis

Soit $\pi$ une distribution positive sur $E = \{1,2,\dots,N\}$. On prend une matrice de transition symétrique irreductible $Q \in \mathbb{R}^{N\times N}$. On définit une matrice de transition par

$$P_{i,j} = \begin{cases} Q_{i,j} \min\{\pi_j/\pi_i\,,1\} & \text{si } i \neq j \\ 1-\sum_{k\neq i} Q_{i,k} \min\{\pi_k/\pi_i\,,1\} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Om remarque que $P$ ne dépend que des quotients $\pi_j/\pi_i$ ; on n'a donc pas besoin de connaître le facteur de normalisation de $\pi$.

1. Montrer que $P$ définit une chaîne de Markov irreductible réversible à distribution stationnaire $\pi$.

Soit $f : \{1,2,\dots,N\} \to \mathbb{R}$ une fonction dont on veut trouver le maximum. Soit $G$ un graphe $d$-régulier connexe sur $\{1,2,\dots,N\}$ et soit $Q$ sa matrice de transition.

2. Interpréter la matrice de transition $P$ si on pose $\pi_i = \lambda^{f(i)}/Z$ où $Z$ est le facteur de normalisation et $\lambda \geq 1$.
3. Calculer la limite de $\pi$ quand $\lambda \to \infty$.

## Exercice 2 Trou spectral

Soit $P$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov irreductible apériodique à ensemble d'états fini de probabilité stationnaire $\pi$.

1. Montrer que la suite $P^n$ converge vers une matrice stochastique de rang 1.
2. Donner une formule pour la limite $P^\infty$.
3. Montrer que $P^n - P^\infty = (P - P^\infty)^n$.
4. Montrer que $P^\infty z = 0$ pour tout vecteur propre $z$ de $P$ qui correspond à une valeur propre différente de 1.

Pour une matrice $A$, on écrit $\lambda_k(A)$ pour la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de $A$ selon l'ordre par module, c'est-à-dire $|\lambda_1(A)| \geq |\lambda_2(A)| \geq \dots$

5. Montrer que $\lambda_1(P) = 1$.
6. Montrer que $|\lambda_1(P - P^\infty)| = |\lambda_2(P)|$.

Pour calculer le taux de convergence de la suite $P^n$, on utilise le théorème de Gelfand :

**Théorème** (Gelfand). $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = |\lambda_1(A)|$ pour toute matrice $A$.

7. Conclure avec le théorème de Gelfand que $\lim_{n\to\infty} \|P^n - P^\infty\|^{1/n} = |\lambda_2(P)|$.
8. Utiliser la forme normale de Jordan pour montrer que $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ si et seulement si $|\lambda_1(A)| < 1$.
9. En déduire le théorème de Gelfand.

## Exercice 3 Semi-norme de Dobrushin

On définit $\delta(x) = \max_{i,j} |x_i - x_j|$ pour tout vecteur $x$.

1. Montrer que $\delta(x) = 2\inf_{y\in\langle \mathbf{1}\rangle} \|x-y\|_\infty$. En déduire que $\delta(x)$ est une semi-norme.

En analogie avec la norme d'opérateur, on définit $\delta(A) = \sup_{\delta(x)=1} \delta(Ax)$.

2. Montrer que $\delta(A)$ est une semi-norme sous-multiplicative.
3. En déduire que $|\lambda| \le \delta(P)$ pour toute valeur propre $\lambda \neq 1$ de la matrice de transition $P$ d'une chaîne irreductible apériodique. En particulier, $|\lambda_2(P)| \le \delta(P)$.
4. Trouver une caractérisation des matrices stochastiques $P$ avec $\delta(P) < 1$ en termes du graphe dirigé défini par $P$.
5. Montrer que $\delta(P^{N-1}) < 1$ où $N$ est le nombre d'états de la chaîne irreductible apériodique dont $P$ est la matrice de transition.
6. En déduire que le taux de convergence de la suite $P^n$ est au plus $1 - \alpha^{N-1}/(N-1)$ où $\alpha$ est la plus petite entrée non nulle de $P$.