Structures et algorithmes aléatoires
TD1

26 septembre 2014

Exercice 1 Quelques probabilités

1. On jète deux dés non biaisés indépendamment. Quelles sont les probabilités des événements suivants ?
   a) Les deux dés ont le même résultat.
   b) Le résultat du premier dé est supérieur à celui du deuxième.
   c) Leur somme est paire.
   d) Leur produit est un carré parfait.
2. On jète 10 dés non biaisés indépendamment. Quelle est la probabilité que leur somme soit un multiple de 6 ?
3. Soit $X_0 = 0$. Recursivement, soit $X_{n+1} = X_n$ avec probabilité p et $X_{n+1} = 1 - X_n$ avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que $X_N = 0$?
4. Un joueur A lance une pièce non biaisée N fois et obtient F_A face. Un joueur B lance la même pièce $N+1$ fois et obtient F_B face. Quelle est la probabilité que $F_A < F_B$?
5. On tire uniformément et indépendamment deux points sur l'intervalle $[0,1]$. Supposant que le plus petit des deux est inférieur à 1/3, quelle est la probabilité que l'autre soit supérieur à 3/4 ?

Exercice 2 Indépendance

1. Soient A et B deux événements disjoints. Sont-ils nécessairement indépendants ?
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants deux à deux. Est-elle nécessairement mutuellement indépendante ?
3. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Montrer que la famille $(B_i)_{i\in I}$ est mutuellement indépendante si $B_i \in \{A_i, \bar{A_i}\}$ pour tout $i \in I$.
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que

$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega \mid \omega \in A_n \text{ pour un nombre infini de } A_n\}\big) \in \{0,1\} \ .$$

   Utiliser le fait que $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n\geq N} x_n \in \{0,\infty\}$ si tous les x_n sont positifs (cf. Théorème de Borel-Cantelli).
   Le résultat reste-t-il vrai si les A_n ne sont pas mutuellement indépendants ?

Exercice 3 Le problème de Monty Hall

On est candidat d'une émission télévisée. On a le choix entre trois rideaux fermés. Derrière un des rideaux est une nouvelle voiture, derrières les deux autres sont deux chèvres. Après notre choix, le présentateur ouvre un des deux rideaux non choisis en nous montrant une chèvre. Il nous donne la possibilité de changer notre choix. Doit-on changer si on veut gagner la voiture ? Comment évolue notre chance de gagner la voiture en changeant le choix ?

Exercice 4 Vérification d'une multiplication matricielle

Soient $A,B,C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On veut définir un algorithme que vérifie que $AB = C$.

1. Donner un algorithme déterministe que fait cette vérification. Quelle est sa complexité ?

2. Quelle est la complexité de vérifier que $ABr = Cr$ pour un vecteur $r \in \mathbb{R}^n$?
3. Si r est un vecteur aléatoire, où chaque coefficient est 0 ou 1 avec probabilité 1/2 et indépendamment des autres, quelle est la probabilité d'avoir $ABr = Cr$ mais $AB \neq C$?