Examen final, deuxième partie.

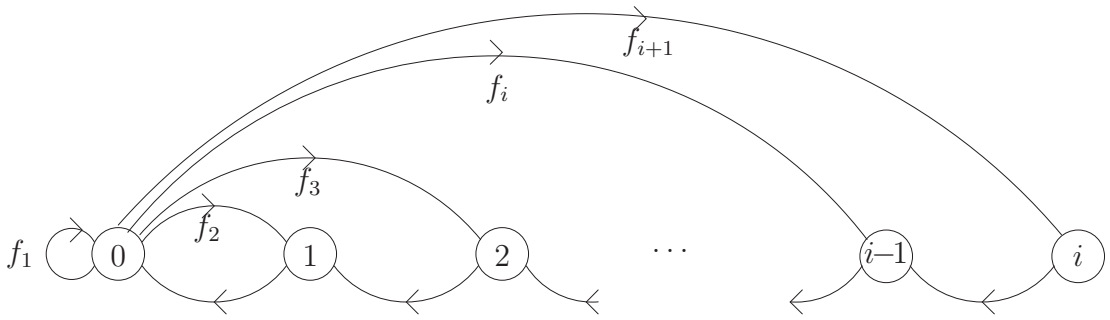
2 pages. Durée: 1h. Documents autorisés: notes du cours.

Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E := \mathbb{N}$ qui admet le graphe de transition ci-dessous, où $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels non-négatifs tels que

(i) $\sum_{n\geq 1} f_n = 1$

(ii) le cardinal de l'ensemble d'entiers $\{n \geq 1\,;\, f_n > 0\}$ est infini.

(iii) le p.g.c.d de $\{n \geq 1\,;\, f_n > 0\}$ est 1.



(1) Montrez que la chaîne est irréductible.

(2) Soit T_0 le temps de retour de la chaîne en 0. Calculez la quantité $P_0(T_0 = n)$ pour tout $n \geq 1$.

(3) Est-ce qu'il existe $\lim_{n\uparrow\infty} p_{00}(n)$, où $p_{00}(n) := P_0(X_n = 0)$?

On considère l'équation

$$u_n = v_n + \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} \qquad (\star)$$

(pour $n = 0$, elle se réduit à $u_0 = v_0$), où $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est l'inconnue et $\{v_n\}_{n\geq 0}$ est une suite donnée de nombre réels tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v_k| < \infty\,.$$

Le symbole $z = x * y$ représente la convolution des suites réelles $x = \{x_n\}_{n\geq 0}$ et

$y = \{y_n\}_{n\geq 0}$, c'est-à-dire la suite réelle $z = \{z_n\}_{n\geq 0}$ definie par

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\,.$$

Donc, en posant $f_0 = 0$, l'équation $(\star)$ s'écrit

$$u = v + f * u\,.$$

(4) Montrez $(\star)$ que a une solution unique.

La solution fondamentale $\{h_n\}_{n\geq 0}$ est définie pour $n = 0$ par $h_0 = 1$, et pour $n \geq 1$ par

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k h_{n-k}.$$

(C'est l'équation $(\star)$ pour la donnée $v_0 = 1$, $v_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.)

(5) Montrez que la solution de $(\star)$ s'exprime comme

$$u = h * v\,.$$

(6) En supposant qu'il existe $\lim_{n\uparrow\infty} h_n$ notée h_∞, montrez qu'il existe $\lim_{n\uparrow\infty} u_n$ notée u_∞ et donnée par

$$u_\infty = h_\infty \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)\,.$$

(7) Montrez que $\lim_{n\uparrow\infty} h_n = \lim_{n\uparrow\infty} p_{00}(n)$.

(8) En déduire l'expression de u_∞ en fonction de $\{v_n\}_{n\geq 0}$ et $\{f_n\}_{n\geq 1}$.

Soit $\{S_n\}_{n\geq 1}$ une suite IID de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ de distribution de probabilité commune

$$P(S_1 = k) = f_k\,, k \geq 1\,.$$

On définit pour $n \geq 0$,

$$R_{n+1} = R_n + S_{n+1}\,,$$

avec $R_0 = 0$. Soit $\{S'_n\}_{n\geq 1}$ une autre suite IID, de même distribution que $\{S_n\}_{n\geq 1}$, et indépendante de cette dernière. On définit la suite $\{R'_n\}_{n\geq 1}$ correspondante de la même façon: $R'_0 = 0$ et pour $n \geq 0$, $R'_{n+1} = R'_n + S'_{n+1}$.

(9) Montrez qu'il existe une variable aléatoire $T > 0$ presque sûrement finie (à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$) telle que $R_T = R'_T$

* * *