Devoir maison 4

Exercice 1 **Lancers de dés**

On lance un dé à 6 faces non biaisé de manière répétitive.

Parmi les processus stochastiques suivants, lesquels sont des chaînes de Markov ? (justifier la réponse, donner une représentation des chaînes de Markov le cas échéant, donner ses caractérisques principales (irrédicibilité, période des classes de communication, récurrence...)

(a) $(X_n)_{n\geq 1}$, où X_n est la plus gande valeur obtenue après n lancers ;

(b) $(N_n)_{n\geq 0}$, où N_n est le nombre de 6 obtenus après n lancers ;

(c) $(C_n)_{n\geq 0}$, où C_n est le nombre de lancers depuis le dernier 6 ;

(d) $(B_n)_{n\geq 0}$, où $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Exercice 2 **Urnes**

On considère $2N$ boules, N blanches et N noires réparties dans 2 urnes. Il y a N boules par urne. À chaque instant, on choisit une boule au hasard (uniformément) dans chacune des urnes et on les échange. On note X_n le nombre de boules noires dans la première urne après n échanges.

1. Montrer que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Préciser son espace d'état et sa matrice de transition. Quelle est sa période, est-elle irréductible ?

2. Montrer que sa probabilité stationnaire est de la forme $\pi(k) = c\binom{N}{k}^2$. Que vaut c ?

3. Quel est le temps moyen entre deux passages en N ? Comparer avec le temps moyen entre deux passages en $N/2$ dans le cas où N est pair.