Devoir maison 2

Exercice 1 — Lancers de dés

On lance un dé non biaisé de manière répétitive.

Parmi les processus stochastiques suivants, lesquels sont des chaînes de Markov ? (justifier la réponse, donner une représentation des chaînes de Markov le cas échéant, donner ses charactéristiques principales : irréductibilité, période des classes de communication, récurrence...)

(a) $(X_n)_{n\geq 1}$, où X_n est la plus grande valeur obtenue après n lancers ;

(b) $(N_n)_{n\geq 0}$, où N_n est le nombre de 6 obtenus après n lancers ;

(c) $(C_n)_{n\geq 0}$, où C_n est le nombre de lancers depuis le dernier 6 ;

(d) $(B_n)_{n\geq 0}$, où $B_n = \sum_{k=0}^{n} N_k$.

Exercice 2 — Urnes (examen 2015)

On considère $2N$ boules, N blanches et N noires réparties dans 2 urnes. Il y a N boules par urne. À chaque instant, on choisit une boule au hasard (uniformément) dans chacune des urnes et on les échange. On note X_n le nombre de boules noires dans la première urne après n échanges.

1. Montrer que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Préciser son espace d'état et sa matrice de transition. Quelle est sa période, est-elle irréductible ?

2. Montrer que sa probabilité stationnaire est de la forme $\pi(k) = c\binom{N}{k}^2$.

On admet que $c = \binom{2N}{N}^{-1}$.

3. Quel est le temps moyen entre deux passages en N ? Comparer avec le temps moyen entre deux passages en $N/2$ dans le cas où N est pair.

Exercice 3 — Convergence vers la loi de Poisson

On pose π une distribution sur $\{-1, 0, 1, \ldots\}$ telle que

$$\pi(k) = \begin{cases} e^{-p} - (1-p) & \text{si } k = -1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \\ e^{-p}\frac{p^k}{k!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer comment construire des variables aléatoires $X \sim \mathcal{B}\mathrm{er}(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}\mathrm{oi}(p)$ telles que $\mathbf{P}(X \neq Y) \leq p^2$.

2. En déduire une construction de variables aléatoires $X \sim \mathcal{B}\mathrm{in}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{P}\mathrm{oi}(np)$ telles que $\mathbf{P}(X \neq Y) \leq np^2$.

Soient pour tous $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = \mathbf{P}(\mathcal{B}\mathrm{in}(n,p) = k)$ et $g(k) = \mathbf{P}(\mathcal{P}\mathrm{oi}(np) = k)$.

3. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(k) - g(k)| \leq 2np^2$.

4. En déduire que pour tous $X \sim \mathcal{B}\mathrm{in}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{P}\mathrm{oi}(np)$ et $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq 2np^2.$$

Exercice 4 — Coloriage maigre

Un coloriage β-maigre d'un graphe est un coloriage propre (deux sommets adjacents ne peuvent avoir la même couleur), où pour chaque sommet v, dans le voisinage de v, au plus β sommets ont la même couleur.

Le but de l'exercice est de montrer que si Δ, le degré maximum d'un graphe G, satisfait $\Delta \geq \beta^\beta$, alors G a un coloriage β-maigre utilisant au plus $16\Delta^{1+1/\beta}$ couleurs.

1. Montrer le résultat pour $\beta = 1$. *Indication :* pas de probabilités dans cette question

On suppose maintenant que $\beta \geq 2$. On pose $C = 16\Delta^{1+1/\beta}$. Pour chaque arête (u, v), on pose $A_{u,v}$ l'événement « u et v ont la même couleur » et pour chaque $\beta + 1$ uplets $v_1, \dots, v_{\beta+1}$ de voisins d'un même sommet, $B_{v_1,\dots,v_{\beta+1}}$ l'événement « $v_1, \dots, v_{\beta+1}$ ont la même couleur ».

2. Calculer la probabilité des événements de type A et B, lorsque le coloriage est effectué de manière uniforme et indépendante pour chaque sommet, sur C couleurs.

3. De combien d'événements de type A (resp. de type B) dépendent les événements de type A (resp. de type B) ?

4. Conclure en appliquant la version asymétrique du lemme local de Lovász.

`Exercice 5` `Chemin de longueur linéaire`

On rappelle le principe d'un parcours en profondeur dans un graphe non orienté $G = (V, E)$. On maintient 3 ensembles de sommets : S, initialement vide, l'ensemble des sommets dont l'exploration a été effectuée ; T, (initialement égal à V), l'ensemble des sommets qui n'ont pas encore été visités ; et $U = V \setminus (S \cup T)$, l'ensemble des sommets visités mais pas encore explorés, qui sont stockés dans une pile. On suppose que les sommets sont ordonnés selon un ordre total σ. L'algorithme s'arrête quand $S = V$, et à chaque étape, si U n'est pas vide, l'algorithme cherche dans T le plus petit voisin (au sens de σ) de v, le sommet de pile de U. Pour ce faire, il effectue des requêtes sur les éléments de T, dans l'ordre σ, pour savoir s'ils sont ses voisins. Si ce sommet existe, on le note u, et on ajoute u dans la pile, et on le retire de T. Si un tel u n'existe pas, alors on retire v de la pile et on l'ajoute à S. Si U est vide, alors on y insère le plus petit sommet de T selon σ. Lorsque $U \cup T = \emptyset$, on effectue le reste des requêtes dans S sur les arêtes non encore parcourues.

1. Montrer qu'à chaque étape de l'algorithme, on sait qu'il n'existe pas d'arête entre les sommets de S et les sommets de T.

2. Montrer que les sommets de U forment un chemin élémentaire.

On effectue un parcours sur un graphe Erdös-Rényi $G \sim \mathcal{G}(n, p)$, les sommets numérotés de 1 à n, en prenant l'ordre naturel. On pose $N = \binom{n}{2}$.

3. Quand l'algorithme de parcours en profondeur, et que si la suite des réponses aux requêtes est une suite i.i.d. $(X_i)_{i=1}^N$ de variables Bernoulli de paramètre p, montrer que le graphe ainsi obtenu est distribué selon $\mathcal{G}(n, p)$. ($X_i = 1$ si la i-ème requête est positive, et 0 sinon)

Étudier les composantes de G revient donc à étudier les propriétés de (X_i).

4. Montrer qu'après t requêtes, si T n'a jamais été vide, $|S \cup U| \geq \sum_{i=1}^t X_i$ et que $|U| \leq 1 + \sum_{i=1}^t X_i$.

Soit $\epsilon > 0$, une constante que l'on fixera suffisamment petite, et soit $(X_i)_{i=1}^N$ une suite i.i.d de variables Bernoulli de paramètre $p = \frac{1+\epsilon}{n}$.

5. Soit $N_0 = \frac{\epsilon n^2}{2}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\sum_{i=1}^{N_0} X_i - \frac{\epsilon(1+\epsilon)n}{2}| \leq n^{2/3}) = 1$ (autrement dit, avec forte probabilité, $|\sum_{i=1}^{N_0} X_i - \frac{\epsilon(1+\epsilon)n}{2}| \leq n^{2/3}$).

On exécute l'algorithme sur $G \sim \mathcal{G}(n, p)$ défini par la suite i.i.d $(X_i)_{i=1}^N \sim \mathcal{B}\text{er}(p)$.

6. Montrer que pour $t \leq N_0$, si après t requêtes, $|S| = n/3$, alors avec forte probabilité $|T| \geq n/3$. Montrer qu'alors l'algorithme a examiné au moins $n^2/9$ paires de sommets, ce qui est contradictoire. En déduire qu'avec forte probabilité, $|S| < n/3$ après N_0 requêtes.

7. Supposons que $|U| < \frac{\epsilon^2 n}{5}$. Montrer qu'avec forte probabilité $|S \cup U| \geq \frac{\epsilon(1+\epsilon)n}{2} - n^{2/3}$, et conclure quant à l'existence d'un chemin de longueur au moins $\epsilon^2 n/5$ dans le graphe.

`Exercice 6`

Exercice 5 du DM1 pour ceux qui ont eu 5 ou moins à cet exercice.