Devoir maison 1

Exercice 1 **Cas d'égalité dans l'inégalité de Markov**

1. Pour une valeur de $a > 0$ arbitraire fixée, donner un exemple de distribution où l'égalité de Markov est vérifiée.

2. Existe-t-il une distribution pour laquelle l'inégalité est une égalité pour deux valeurs a et b distinctes ?

Exercice 2 **Loi géométrique est sans mémoire**

Nous avons vu en cours que la loi géométrique est une loi sans mémoire : si X est une v.a. de distribution géométrique, pour tous entiers $k \geq 0$ et $n > 0$,

$$\mathbf{P}(X = n + k \mid X > k) = \mathbf{P}(X = n).$$

Montrer que les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 3 **Usines de montres**

Deux usines A et B produisent des montres. L'usine A produit une montre défectueuse sur 100 et B une sur 200 (on supposera les états des montres indépendants). Un détaillant reçoit une caisse de n montres de chacune des usines, sans pouvoir connaître l'origine des caisses. Il ouvre une caisse au hasard, prend une montre au hasard et vérifie l'état de cette montre, qui fonctionne.

Quelle est alors la probabilité qu'une seconde montre prise au hasard dans la même caisse fonctionne aussi ?

Exercice 4 **Distribution uniforme**

Considérons un flot de données $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Une fois reçu ce flot, on veut générer de manière uniforme un nombre parmi les w derniers reçus ($P(X = k)$ est proportionnelle au nombre de k reçus parmi les w derniers nombres) On suppose que w n'est pas connu à l'avance.

1. Comment faire avec une mémoire de $O(n)$ nombres (on ne tient pas compte de la place pour coder un entier) ?

Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut faire beaucoup mieux en moyenne. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$. On admet que deux v.a. uniformément distribuées sur $[0, 1]$ ont même valeur avec probabilité 0.

2. Quelle est la probabilité que $X_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

3. Montrer que l'algorithme suivant permet de générer un nombre de manière uniforme parmi les w derniers reçus.

Algorithme 1 : query(t, w)

début
  pour $s = 1$ *à* t **faire**
    $v(s) \leftarrow n_s$;
    $r(s) \leftarrow random[0, 1]$;
  $j \leftarrow Argmin_{i \in [t-w+1, t]} r(i)$;
  retourner *v(j).*
fin

4. Améliorer cet algorithme en ne gardant que l'information nécessaire. Quelle est alors le nombre moyen de valeurs à mémoriser ?

`Exercice 5` `Graphes aléatoires bipartis`

Rappel :
- pour tout $p \in (0,1)$ et tout u, $(1-p)^u \leq e^{-pu}$,
- pour tout $p \in (0,1/2)$ et tout u, $(1-p)^u \geq e^{-(p+p^2)u}$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit un graphe aléatoire biparti dans $G(n,n,p)$ comme un graphe dont les sommets sont $U \cup V$, avec $|U| = |V| = n$ et $U \cap V = \emptyset$, et pour tout $u \in U$ et $v \in V$, il y a une arête entre u et v avec probabilité p et ce indépendamment du reste du graphe. Il n'y a pas d'arête entre deux sommets de U ni entre deux sommets de V.

1. Quel est le nombre moyen d'arêtes dans un graphe de $G(n,n,p)$?

On s'intéresse maintenant à l'existence d'un couplage parfait dans un tel graphe, c'est-à-dire que l'on peut établir une bijection f entre U et V telle que pour tout $u \in U$, $(u, f(u))$ est une arête.

On rappelle le théorème de Hall qui caractérise l'existence d'un couplage parfait : pour tout $S \subset U$ (resp. $S \subset V$), $|S| \leq |N(S)|$, où $N(S)$ désigne l'ensemble des voisins de S.

Si on choisit un S de cardinal minimal qui viole la condition de Hall, on peut montrer que S satisfait les conditions suivantes :

(i) $|S| = |N(S)| + 1$;

(ii) $|S| \leq \lceil n/2 \rceil$;

(iii) tout sommet de $N(S)$ est adjacent à au moins deux sommets de S.

On pose $s = |S|$.

On étudie d'abord le cas $s = 1$.

2. Si $s = 1$, que peut-on dire de l'ensemble minimal S qui viole la propriété de Hall ?

On note I le nombre de sommets isolés dans un graphe de $G(n,n,p)$.

3. Que vaut $\mathbb{E}[I]$? Montrer que $\mathbf{V}\mathrm{ar}(I) \leq \mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[I]^2 \frac{p}{2(1-p)}$.

4. En déduire que si $np - \ln n \to -\infty$, alors asymptotiquement presque sûrement, il n'y a pas de couplage parfait dans le graphe.

On suppose maintenant que $\ln n + \ln \ln n \leq np \leq 2 \ln n$.

5. Si $s = 2$, quelle est la forme de S ?

On appelle cette forme *cerise*. Soit X le nombre de cerises dans le graphe.

6. Montrer que $\mathbb{E}[X] = o(1)$.

Soit $\mathcal{A}$ l'événement " il y a un ensemble de taille minimale $s \geq 3$ qui viole la condition de Hall".

7. Montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{A}) \leq 2 \sum_{s=3}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n}{s} \binom{n}{s-1} \binom{s}{2}^{s-1} p^{2s-2} (1-p)^{s(n-s+1)}$.

On admet que $\mathbf{P}(\mathcal{A}) = O(\frac{\ln^{11/2} n}{\sqrt{n}})$.

8. Déduire des questions précédentes que si $np \geq \ln n + \ln \ln n$, alors asymptotiquement presque sûrement, il y a un couplage parfait dans le graphe.