Devoir maison

Les notations qui ne sont pas rappelées sont celles du cours. Vous êtes autorisés à réfléchir à plusieurs sur les exercices (pas plus de deux ou trois). Cependant, la rédaction doit être individuelle et chacun doit rendre une copie. Précisez les noms de vos collaborateurs.

Exercice 1 — Cas d'égalité dans l'inégalité de Markov

1. Pour une valeur de $a > 0$ fixée, donner un exemple de distribution où l'égalité de Markov est vérifiée.

2. Existe-t-il une distribution pour laquelle l'inégalité est une égalité pour deux valeurs a et b distinctes ?

Exercice 2 — Loi géométrique est sans mémoire

Nous avons vu en cours que la loi géométrique est une loi sans mémoire : si X est une v.a. de distribution géométrique, pour tous entiers $k \geq 0$ et $n > 0$,

$$\mathbf{P}(X = n + k \mid X > k) = \mathbf{P}(X = n).$$

Montrer que les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 3 — Usines de montres

Deux usines A et B produisent des montres. L'usine A produit une montre défectueuse sur 100 et B une sur 200 (on supposera les états des montres indépendants). Un détaillant reçoit une caisse de n montres de chacune des usines, sans pouvoir connaître l'origine des caisses. Il ouvre une caisse au hasard, prend une montre au hasard et vérifie l'état de cette montre, qui fonctionne.

Quelle est alors la probabilité qu'une seconde montre prise au hasard dans la même caisse fonctionne aussi ?

Exercice 4 — Distribution uniforme

Considérons un flot de données $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Une fois reçu ce flot, on veut générer de manière uniforme un nombre parmi les w derniers reçus (la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$ est proportionnelle au nombre de k reçus parmi les w derniers nombres). On suppose que w n'est pas connu à l'avance.

1. Comment faire avec une mémoire en $O(n)$ nombres ?

Le but de cet exercice est de montrer que l'on peut faire beaucoup mieux en moyenne. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$. On admet que deux v.a. uniformément distribuées sur $[0, 1]$ ont même valeur avec probabilité 0.

2. Quelle est la probabilité que $X_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

3. Montrer que l'algorithme 1 permet de générer un nombre de manière uniforme parmi les w derniers reçus.

4. Améliorer cet algorithme en ne gardant que l'information nécessaire. Quelle est alors le nombre moyen de valeurs à mémoriser (c'est-à-dire le nombre de nombres mémorisés après réception des t nombres) ?

Exercice 5 — Population totale d'un arbre de Galton-Watson

Soit $\mathcal{Z}$ la taille (ou population totale) d'un processus de branchement de Galton-Watson dont la probabilité d'extinction est 1 : on note $\mathcal{Z} = \sum_{i,n} Z_i^{(n)}$. Soit $g_{\mathcal{Z}}$ sa fonction génératrice.

Montrer que $g_{\mathcal{Z}}(s) = s g_Z(g_{\mathcal{Z}}(s))$.

Algorithme 1 : query(t, w)

```
début
    pour s = 1 à t faire
        v(t) ← n_t;
        r(t) ← random[0, 1];
    j ← Argmin_{i∈[t−w+1,t]} r(i);
    retourner v(j).
fin
```

Exercice 6 Coupe minimale dans un graphe

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe (graphe avec des arêtes multiples) sans boucle et connexe. Une *coupe* est un ensemble d'arêtes qui, si elles sont retirées du graphe, le déconnecte. On souhaite touver le cardinal minimal d'une coupe.

On propose un algortihme probabiliste et le but est de calculer une borne sur la probabilité de succès de cet algorithme.

L'algorithme consiste en une succession de contraction d'arêtes à chaque étape, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux sommets dans le graphe, on sélectionne une arête uniformément parmi toutes les arêtes du graphe, on identifie les deux extrémités de cette arête et enfin on supprime toutes le boucles créées (c'est-à-dire toutes les arêtes entre ces deux sommets, qui ne forment maintenant plus qu'un sommet). À la fin, on retourne le nombre d'arêtes entre les deux sommets restants.

1. Montrer que les arêtes restantes sont initialement une coupe du graphe, et donc que le résultat renvoyé est au moins égal au cardinal de la coupe minimale.

Soit n le nombre de sommets du graphe initial, m le nombre d'arêtes et k le cardinal d'une coupe minimale, et $\mathcal{C}$ une coupe minimale.

2. Montrer que $m \geq \frac{kn}{2}$.

On calcule maintenant la probabilité qu'aucune arête de $\mathcal{C}$ ne soit choisie. On note A_i l'événement « aucune arête de $\mathcal{C}$ n'est choisie à l'étape i pour la contraction ».

3. Calculer $\mathbf{P}(A_i \mid A_1, \ldots, A_{i-1})$.

4. En déduire que la probabité de succès de l'algorithme est au moins de $\frac{2}{n^2}$.

5. Donner une borne sur le nombre d'exécutions à effectuer pour avoir une probabilité d'échec d'au plus $1/e$?