

Introduction à la cryptologie
TD n° 2 : Logarithme discret

Exercice 1 (Multi-exponentiation). Soit \mathbb{G} un groupe abélien (noté multiplicativement). Soient t éléments g_1, \dots, g_t du groupe \mathbb{G} et des entiers positifs $n_1, \dots, n_t < |\mathbb{G}|$. Proposer un algorithme qui calcule le produit $g_1^{n_1} \dots g_t^{n_t} \in \mathbb{G}$ en $O(\ell + 2^t)$ multiplications dans \mathbb{G} (où ℓ est la taille en bits de $\max(n_1, \dots, n_t)$).

Exercice 2 (Algorithmes génériques de logarithme discret). Considérons un groupe multiplicatif cyclique \mathbb{G} engendré par $g \in \mathbb{G}$ d'ordre premier connu p . Soit h un élément de \mathbb{G} . Notre but est de trouver le logarithme discret de h en base g , i.e. trouver $x \in \mathbb{Z}_p$ tel que $g^x = h$.

A. Algorithme naïf. Proposer un algorithme qui trouve x en temps $O(p)$. (Vous avez 30 secondes.)

B. Algorithme de Shanks. Soit $m = \lceil \sqrt{p} \rceil$. Soit x le logarithme discret de h en base g . Soit $x = mq + r$ la division euclidienne de x par m (dans les entiers). On remarque que $hg^{-mq} = g^r$. En se basant sur cette observation, proposer un algorithme qui calcule le logarithme discret dans \mathbb{G} en temps et en mémoire $O(\sqrt{p})$.

C. Algorithme ρ de Pollard. Soit $F : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{Z}_q$. Nous définissons une fonction $H : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ par $H(\alpha) = \alpha \cdot h \cdot g^{F(\alpha)}$ et l'algorithme (1). Considérons la suite $(\gamma_i)_{i \geq 1}$ définie par récurrence par $\gamma_1 = h$ et $\gamma_{i+1} = H(\gamma_i)$

Algorithme 1 Algorithme ρ de Pollard (pour le logarithme discret)

Entrée: $g, h \in \mathbb{G}$

Sortie: $x \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $h = g^x$ ou ÉCHEC

```
1:  $i \leftarrow 1$ 
2:  $x \leftarrow 0; \alpha \leftarrow h$ 
3:  $y \leftarrow F(\alpha); \beta \leftarrow H(\alpha)$ 
4: tant que  $\alpha \neq \beta$  faire
5:    $x \leftarrow x + F(\alpha) \bmod p; \alpha \leftarrow H(\alpha)$ 
6:    $y \leftarrow y + F(\beta) \bmod p; \beta \leftarrow H(\beta)$ 
7:    $y \leftarrow y + F(\beta) \bmod p; \beta \leftarrow H(\beta)$ 
8:    $i \leftarrow i + 1$ 
9: fin tant que
10: si  $i < p$  alors
11:   retourner  $(x - y)/i \bmod p$ 
12: sinon
13:   retourner ÉCHEC
14: fin si
```

pour $i \geq 1$.

1. Montrer que dans la boucle **tant que** des lignes 4 à 9 de l'algorithme (1), nous avons

$$\alpha = \gamma_i = g^x h^i \text{ et } \beta = \gamma_{2i} = g^y h^{2i}.$$

2. Montrer que si cette boucle termine avec $i < p$ alors l'algorithme retourne le logarithme discret de h en base g .
3. Soit j le plus petit entier tel que $\gamma_j = \gamma_k$ pour un entier $k < j$. Montrer que $j \leq p + 1$ et que la boucle termine avec $i < j$.
4. Montrer que si F est une fonction aléatoire, alors le temps moyen d'exécution de l'algorithme est en $O(p^{1/2})$ multiplications dans \mathbb{G} .

Exercice 3 (Logarithme discret de petit poids de Hamming). Le nombre de multiplications effectuées par l'algorithme d'exponentiation dichotomique dépend du nombre de 1 dans le développement en base 2 de l'exposant considéré. Il a donc été suggéré pour rendre les protocoles cryptographiques plus efficaces d'utiliser des clés secrètes où ce nombre, le *poids de Hamming* de l'exposant, est relativement petit. Pour se prémunir d'attaque

par recherche exhaustive de la clé secrète, il est nécessaire que le nombre de tels exposants soit suffisamment grand. Le nombre d'exposants de ℓ bits de poids w est donné par le coefficient binomial $\binom{\ell}{w}$. L'exercice montre une adaptation de l'algorithme de Shanks pour résoudre le problème du logarithme discret de petit poids de Hamming en $O(\ell \binom{\ell/2}{w/2})$ exponentiations dans le groupe considéré.

Considérons un groupe multiplicatif cyclique \mathbb{G} engendré par $g \in \mathbb{G}$ d'ordre connu q un nombre premier de ℓ bits (i.e. $2^{\ell-1} < q < 2^\ell$). Soit w un entier dans $\{1, \dots, \ell\}$. Nous supposons que ℓ et w sont pairs.

1. Donner un algorithme pour calculer le logarithme discret dans \mathbb{G} d'un élément h dont le poids de Hamming du logarithme discret est égal à w en $O(\binom{\ell}{w/2})$ exponentiations dans le groupe et dont la complexité en mémoire est $O(\binom{\ell}{w/2})$ éléments de groupe.

Soient N un entier et ℓ et w deux entiers pairs. Un système de décomposition de type (N, ℓ, w) est un couple (X, \mathcal{C}) tel que

- X est un ensemble de cardinal ℓ ;
 - \mathcal{C} est une famille de N sous-ensembles de X de cardinaux $\ell/2$;
 - pour tout sous ensemble A de X de cardinal w , il existe un sous-ensemble $C \in \mathcal{C}$ tel que $|A \cap C| = w/2$.
2. Montrer que s'il existe un système de décomposition de type (N, ℓ, w) alors le problème du logarithme discret de poids de Hamming égal à w peut être résolu en $O(N \binom{\ell/2}{w/2})$ exponentiations dans le groupe et en stockant $O(\binom{\ell/2}{w/2})$ éléments de groupe.
 3. Posons $X = \mathbb{Z}_\ell$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{C_i, 0 \leq i \leq \ell/2 - 1\}$, définie par

$$C_i = \{i + j \bmod \ell, 0 \leq j \leq \ell/2 - 1\} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq \ell/2 - 1$$

est un système de décomposition de type $(\ell/2, \ell, w)$.

4. Conclure.

Exercice 4 (Auto-réductibilité du problème du logarithme discret). Soit \mathbb{G} un groupe fini cyclique d'ordre p et g un générateur de \mathbb{G} . Considérons un algorithme \mathcal{A} qui prend en entrée un élément de \mathbb{G} et retourne un entier, en temps τ (dans le pire des cas) où τ représente au moins le coût d'une exponentiation dans \mathbb{G} .

Supposons qu'il existe un sous-ensemble E de \mathbb{G} avec $|E| \geq \epsilon |\mathbb{G}|$ et $\epsilon \in]0, 1]$ pour lequel lorsque \mathcal{A} est exécuté sur un élément $h \in E$, l'entier retourné par \mathcal{A} est le logarithme discret de h en base g . Considérons l'algorithme \mathcal{B} défini à partir de \mathcal{A} dans l'algorithme (2).

Algorithme 2 Algorithme \mathcal{B}

Entrée: $g, h \in \mathbb{G}$

Sortie: $x \in \mathbb{Z}_p$ tel que $h = g^x$.

tant que VRAI faire

$c \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_p$ (c est tiré uniformément aléatoirement dans \mathbb{Z}_p)

$h' \leftarrow g^c$

$w \leftarrow \mathcal{A}(h \cdot h')$

si $g^w = h \cdot h'$ **alors**

retourner $w - c \bmod p$

fin si

fin tant que

Montrer que l'algorithme \mathcal{B} résout le problème du logarithme discret dans \mathbb{G} en temps espéré $O(\tau/\epsilon)$.

Exercice 5 (Logarithme discret et Diffie-Hellman). Soit M un entier. Soit $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ un groupe fini cyclique d'ordre premier p tel que $p - 1$ soit M -friable et soit $h = g^x \in \mathbb{G}$.

1. Donner un algorithme probabiliste qui retourne $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}_p^*$ un générateur de \mathbb{Z}_p^* .
2. Montrer que si $x \neq 0 \bmod p$, il existe $y \in \mathbb{Z}_{p-1}$ tel que $x = \mathbf{g}^y \bmod p$. En déduire que pour retrouver x , il suffit de calculer y modulo tous les diviseurs de $p - 1$ qui sont puissances d'un nombre premier.
3. Soit q un diviseur premier de $p - 1$. Donner un algorithme qui prenant en entrée h et \mathbf{g} et disposant d'un oracle qui résout le problème calculatoire de Diffie-Hellman dans \mathbb{G} retourne $y \bmod q$ en faisant au plus $O(\log p)$ requêtes à l'oracle et $O(\sqrt{q})$ exponentiations dans \mathbb{Z}_{p-1} et \mathbb{G} .
4. Adapter l'algorithme précédent pour qu'il retourne $y \bmod q^e$ lorsque q^e est une puissance d'un nombre premier divisant $p - 1$.
5. Conclure.