Université Paris 7 **6 décembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 9
Récursivité

Remarque utile : dans tout le TD, on suppose connu le fait que l'addition, la soustraction (limitée, c'est-à-dire $a - b = 0$ si $b > a$), et la multiplication sont primitives récursives.

Par ailleurs un ensemble est primitif récursif ssi sa fonction caractéristique est primitive récursive. Une relation est primitive récursive ssi son graphe est primitif récursif.

***Exercice* 1 :** Montrer que l'addition ne peut être obtenue à partir des fonctions de base et en n'utilisant que la composition.

***Exercice* 2 :** Montrer que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ est primitif récursif.

***Exercice* 3 :** Soit f une fonction primitive récursive de $\mathfrak{F}_3$, g primitive récursive de $\mathfrak{F}_4$ et a un entier fixé. Montrer que :
a- $(y, z) \mapsto f(y, z, y)$ est primitive récursive.
b- $(x, y, z) \mapsto g(zy, a, y, x + a)$ est primitive récursive.

***Exercice* 4 :** Montrer que la propriété « être pair » est primitive récursive.

***Exercice* 5 :** Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives.
a- $x \mapsto$ partie entière de $x/2$.
b- $x \mapsto$ partie entière de $\sqrt{x}$.
c- la fonction caractéristique de « x est une somme de deux carrés ».

***Exercice* 6 :** Montrer que les fonctions $(x, y, z) \mapsto \sup(x, y, z)$ et $(x, y, z) \mapsto \inf(x, y, z)$ sont primitives récursives.

***Exercice* 7 :** Soit A le plus petit ensemble d'entier contenant 0 et tel que $\forall n \in A, 2^n \in A$. Montrer que A est primitif récursif.

***Exercice* 8 :**
a- Montrer que si une fonction de $\mathfrak{F}_p$ est primitive récursive, alors son graphe est primitif récursif.
(La réciproque est fausse : La fonction d'Ackermann en est un contre-exemple)
b- Soit f une fonction de $\mathfrak{F}_p$. Montrer que si le graphe de f est primitif récursif, et si f est bornée par une fonction g primitive récursive de $\mathfrak{F}_p$, alors f est primitive récursive.
(Remarque : par contre on peut facilement trouver une fonction non primitive récursive mais qui soit bornée par une fonction primitive récursive)

***Exercice* 9 :**
a- Montrer que la fonction q définie par

$$q(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y = 0 \\ \text{partie entière de } \dfrac{x}{y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est primitive récursive.
b- En déduire que la relation « x divise y », notée $x|y$, est primitive récursive.
c- En conclure que la propriété « être premier » est primitive récursive.

***Exercice* 10 :** [Bonus sur les prédicats] Soit un langage $L_= \{\simeq, R\}$ où R est un symbole de relation binaire. On considère, pour chaque entier $n \geq 2$, la formule G_n suivante :

$$G_n = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \ \ (R x_1 x_2 \wedge R x_2 x_3 \wedge R x_3 x_4 \wedge \ldots \wedge R x_n x_1)$$

On pose $T = \{\neg G_n \ ; \ n \geq 2\}$.

1. Donner une L-structure $\mathfrak{M}$ qui satisfait G_4, puis une L-structure $\mathfrak{N}$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \neg G_4$.
2. Donner, pour chaque $n \geq 2$, une L-structure $\mathfrak{N}_n$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \ldots \wedge \neg G_n \wedge G_{n+1}$.

3⋆. Montrer que, pour toute formule close F qui est conséquence de T, il existe une L-structure $< M, R^M >$ modèle de F, telle que la relation binaire R^M possède un cycle (c'est-à-dire satisfait l'une des formules G_n). (On pourra appliquer le théorème de compacité)

4⋆. Montrer que T n'est logiquement équivalente à aucun ensemble fini de formules de L.

***Exercice* 11 :** [Bonus sur les clauses] On dit qu'une clause est une *clause de Horn* ssi elle a au plus une variable positive (au plus une variable à droite de $\Longrightarrow$).

a- Montrer que si un ensemble de clauses de Horn ne contient pas de clause du type $\Longrightarrow v$, alors cet ensemble est satisfaisable.

b⋆- En déduire un algorithme polynomial pour déterminer si un ensemble de clauses de Horn est satisfaisable.