Université Paris 7 **8 novembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 7
Révisions

***Exercice* 1 :** [Prédicats] Soit un langage $L_=\{\simeq,\ R\}$ où R est un symbole de relation binaire. On considère, pour chaque entier $n \geq 2$, la formule G_n suivante :

$$G_n = \exists\, x_1 \exists\, x_2 \ldots \exists\, x_n \quad (R\, x_1 x_2 \wedge R\, x_2 x_3 \wedge R\, x_3 x_4 \wedge \ldots \wedge R\, x_n x_1)$$

On pose $T = \{\neg G_n\ ;\ n \geq 2\}$.

1. Donner une L-structure $\mathfrak{M}$ qui satisfait G_4, puis une L-structure $\mathfrak{N}$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \neg G_4$.
2. Donner, pour chaque $n \geq 2$, une L-structure $\mathfrak{N}_n$ qui satisfait $\neg G_2 \wedge \neg G_3 \wedge \ldots \wedge \neg G_n \wedge G_{n+1}$.

3⋆. Montrer que, pour toute formule close F qui est conséquence de T, il existe une L-structure $< M, R^M >$ modèle de F, telle que la relation binaire R^M possède un cycle (c'est-à-dire satisfait l'une des formules G_n). (On pourra appliquer le théorème de compacité)

4⋆. Montrer que T n'est logiquement équivalente à aucun ensemble fini de formules de L.

***Exercice* 2 :** [Clauses] On dit qu'une clause est une *clause de Horn* ssi elle a au plus une variable positive (au plus une variable à droite de $\implies$).

a- Montrer que si un ensemble de clauses de Horn ne contient pas de clause du type $\implies v$, alors cet ensemble est satisfaisable.

b⋆- En déduire un algorithme polynomial pour déterminer si un ensemble de clauses de Horn est satisfaisable.

***Exercice* 3 :** [Connecteurs] Soit α le connecteur ternaire défini par :

$$\alpha(a, b, c) \text{ ssi } (a \wedge b) \Rightarrow c$$

Montrer que $\{\mathbf{0}, \alpha\}$ est un système de connecteurs complet.

***Exercice* 4 :** [Règle des poids] Soient a et b deux symboles de constantes, h et k deux symboles de fonctions unaires, f et g deux symboles de fonctions binaires. Le mot suivant est-il un terme ?

$$fghgv_{10}v_3ggaggkhv_4ghv_2v_1gbv_8v_0fggv_9v_3gv_9v_{10}ffv_0fgv_7bfv_{11}v_{12}fv_2ggv_6v_1v_7$$

Si oui, donner les termes t_1 et t_2 tels que ce mot est ft_1t_2

***Exercice* 5 :** [Structures]

(a) On considère le langage $\mathcal{L} = \{R, S, f\}$ où R et S sont des symbols de relations binaires et f un symbols de fontion binaire. On s'intéresse aux $\mathcal{L}$-structures :
$\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, >, <, \times \rangle$
$\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, >, <, + \rangle$
Trouver un $\mathcal{L}$-énoncé ϕ tel que $\mathcal{M}_1 \models \phi$ et $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi$

(b) On considère maintenant le langage $\mathcal{L} = \{f, g, c\}$ où f et g sont des fonctions binaires, et c un constante. Soit le $\mathcal{L}$-énoncé :

$$\phi = \forall y \forall z \exists x (\neg y \simeq c \implies gfxyz \simeq c)$$

Trouver deux $\mathcal{L}$-structures dont l'une satisfait ϕ et l'autre pas.

(c) On pose $\mathcal{L} = \{a, c, R, f, g\}$ et la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, \subseteq, \cap, \cup \rangle$. Donner ϕ telle que $Val(\phi, \mathcal{M}) = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$