Université Paris 7 **26 octobre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 6

Calcul des prédicats

***Exercice* 1 :** Soit $L = \{\simeq, c, f, g\}$ un langage du calcul des prédicats où c est un symbole de constante, f et g sont des symboles de fonctions à 2 places respectivement.

On considère les L-structures suivantes : $\mathfrak{M}_1 = \{\mathbb{Q}, =, 1, +, \times\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{\mathbb{R}, =, 1, +, \times\}$, $\mathfrak{M}_3 = \{\mathbb{C}, =, 1, +, \times\}$.

On considère les formules suivantes de L :

$F_0 = \forall x\ (\ g(c, x) \simeq x\ )$
$F_1 = \exists y\, \forall x\ (\ g(x, y) \simeq x\ )$
$F_2 = \exists y\, \forall x\ (\ g(x, y) \simeq y\ )$
$F_3 = \forall x\, \forall y\, \exists z\ (\ f(x, g(z, z)) \simeq y\ )$
$F_4 = \forall x\, \forall y\, \exists! z\ (\ f(x, g(z, g(z, z))) \simeq y\ )$
pour $0 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 3$, donner la valeur de F_i, dans $\mathfrak{M}_j$.

***Exercice* 2 :** Le langage $L = \{R, f, c\}$ est constitué d'un symbole de relation binaire R, d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de constante c.

On considère la L-structure $\mathfrak{N} =< \mathbb{R}, \leq, \pi, \cos >$. Pour chacune des formules suivantes $F[v_0]$, donner l'ensemble des réels a tel que $\mathfrak{N} \models F[a]$:

Rcv_0	$\exists v_1\, fv_1 = v_0$	$\exists v_1\, fv_0 = v_1$
$fv_0 = c$	$\exists v_1\ (Rcv_0 \wedge fv_1 = v_0)$	$\exists v_1\ (Rcv_1 \wedge fv_0 = v_1)$
$\forall v_1\ Rv_0fv_1$	$\forall v_1\ Rfv_0fv_1$	$\forall v_1\, \exists v_2\ (Rv_1v_2 \wedge fv_2 = v_0)$
$\forall v_0\, \exists v_1\ fv_1 = v_0$	$\exists v_1 \forall v_2\ Rfv_2v_1$	

***Exercice* 3 :** Le langage $\mathcal{L}$ comporte deux symboles de fonction unaire f et g. On considère les cinq formules closes suivantes de $\mathcal{L}$:

F_1 : $\forall x\ fx = gx$
F_2 : $\forall x \forall y\ fx = gy$
F_3 : $\forall x \exists y\ fx = gy$
F_4 : $\exists x \forall y\ fx = gy$
F_5 : $\exists x \exists y\ fx = gy$

Donner un modèle pour chacune des six formules $F_1 \wedge \neg F_2$, F_2, $\neg F_1 \wedge F_3$, $\neg F_1 \wedge F_4$, $\neg F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5$, $\neg F_5$.

***Exercice* 4 :** Dans tous les langages considérés dans cet exercice, R est un symbole de relation binaire, $*$ et $\oplus$ sont des symboles de fonction binaire, c et d sont des symboles de constante.

On écrira $x \oplus y$ et $x * y$ au lieu, respectivement, de $\oplus xy$ et $*xy$, et x^2 sera une abréviation de $x * x$.

a. Dans chacun des cas suivants, on donne un langage L_i et deux L_i-structures $\mathfrak{U}_i$ et $\mathfrak{B}_i$, et on demande une formule close de L_i vraie dans $\mathfrak{U}_i$ et fausse dans $\mathfrak{B}_i$.

1) $L_1 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_1 =< \mathbb{N}, \leq>$	$\mathfrak{B}_1 =< \mathbb{Z}, \leq>$
2) $L_2 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_2 =< \mathbb{Q}, \leq>$	$\mathfrak{B}_2 =< \mathbb{Z}, \leq>$
3) $L_3 = \{*\}$	$\mathfrak{U}_3 =< \mathbb{N}, \times >$	$\mathfrak{B}_3 =< \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap >$
4) $L_4 = \{c, *\}$	$\mathfrak{U}_4 =< \mathbb{N}, 1, \times >$	$\mathfrak{B}_4 =< \mathbb{Z}, 1, \times >$
5) $L_5 = \{c, d, \oplus, *\}$	$\mathfrak{U}_5 =< \mathbb{R}, 0, 1, +, \times >$	$\mathfrak{B}_5 =< \mathbb{Q}, 0, 1, +, \times >$
6) $L_6 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_6 =< \mathbb{Z}, \equiv_2>$	$\mathfrak{B}_6 =< \mathbb{Z}, \equiv_3>$
7) $L_7 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_7 =< \mathbb{R}, \leq>$	$\mathfrak{B}_7 =< \mathbb{N}, \leq>$
8) $L_8 = \{R\}$	$\mathfrak{U}_8 =< \mathbb{N}, \{(n, n+1)\ ;\ n \in \mathbb{N}\} >$	$\mathfrak{B}_8 =< \mathbb{Z}, \{(k, k+1)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} >$

b. Pour chacune des formules closes suivantes du langage $\{c, \oplus, *, R\}$, on demande de donner un modèle de cette formule ainsi qu'un modèle de sa négation :

F_1 : $\forall u\,\forall v\,\exists x(\neg v = c \Rightarrow u \oplus (v * x) = c)$
F_2 : $\forall u\,\forall v\,\forall w\,\exists x(\neg w = c \Rightarrow u \oplus (v * x) \oplus (w * x^2) = c)$
F_3 : $\forall x\,\forall y\,\forall z(Rxx \wedge ((Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz) \wedge (Rxy \Rightarrow Ryx))$
F_4 : $\forall x\,\forall y\,\forall z(Rxy \Rightarrow Rx{*}z\ \ y{*}z)$
F_5 : $\forall x\,\forall y(Rxy \Rightarrow \neg Ryx)$

***Exercice* 5 :** Mettre les formules suivantes sous forme prénexe :
$A = \forall x((\exists y, x < y) \implies (\forall y, x \leq y))$
$B = (\forall x, Rxx) \implies (\forall x \exists y, Rxy)$
$C = (\exists x \forall y, x \simeq y) \Leftrightarrow ((\forall x \forall y, x \simeq y) \wedge (\exists x, x \simeq x))$

***Exercice* 6 :** On considère un symbole de constante c, un symbole de fonction à un argument s, un symbole de relation à un argument R. Pour chacun des choix suivants du langage L, déterminer combien il y a de L-structures dont l'ensemble de base est $\{0,\ 1\}$:
a) $L = \{c, \simeq\}$.
b) $L = \{s, \simeq\}$.
c) $L = \{R, \simeq\}$.
d) $L = \{c, s, R, \simeq\}$.

***Exercice* 7 :** On considère le langage $\mathcal{L} = \{\simeq, E\}$, où E est une relation d'équivalence. Pour chacun des cas suivant, formuler une $\mathcal{L}$-énoncé F tel que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, on ait $\mathcal{M} \models F$ ssi :
a. chaque classe d'équivalence a exactement trois éléments.
b. il n'y a pas plus d'une classe d'équivalence qui ait un seul élément.

***Exercice* 8 :** Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $\phi[v_1, \ldots, v_n]$ une $\mathcal{L}$-formule. On appelle $v$aleur de ϕ dans $\mathcal{M}$ le sous-ensemble suivant :

$$Val(\phi, \mathcal{M}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n | M \models \phi[a_1, \ldots, a_n]\}$$

On considère le langage $\mathcal{L} = \{\simeq, f, g\}$. On dénote par $\mathcal{N}$ la $\mathcal{L}$-structure dont l'ensemble de base est $\mathbb{N}$, et où f et g sont interprétés par l'addition et la multiplication respectivement.
a. Déterminer la valeur des formules suivantes :
$\alpha[x, y] = \exists z, fxz \simeq y$
$\beta[x] = gxx \simeq x$
$\gamma[x] = \exists y, x \simeq gyy$
$\delta[x] = \exists y, \exists z, (\beta(y) \wedge \neg\gamma(y) \wedge gfzyz \simeq x)$
b. Pour chaque ensemble, donner une formule dont la valeur dans $\mathcal{N}$ est cet ensemble.
$A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 2\}$
$B = \{2\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ impair}\}$
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : z = pgcd(x, y)\}$