Université Paris 7 **11 octobre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 4

Révisions, un peu plus de sémantique
Les questions marquées d'une étoile $\star$ sont plus difficiles.

***Exercice* 1 :** On sait que toute formule est équivalente à une formule FNDC et une formule FNCC. Montrer que ces deux formules sont uniques, à permutation des termes près (et des variables à l'intérieur des termes).

***Exercice* 2 :** Par **0** et **1**, on désigne les connecteurs 0-aires dont les valeurs de vérité sont constantes égales à 0 et 1, respectivement.

a. Montrer que les systèmes suivants sont complets :

$$\{\mathbf{0}, \Rightarrow\} ; \quad \{\mathbf{0}, \Leftrightarrow, \vee\} ; \quad \{\mathbf{0}, \Leftrightarrow, \wedge\}$$

b$\star$. Montrer que les systèmes suivants ne sont pas complets :

$$\{\mathbf{1}, \Rightarrow, \wedge, \vee\} ; \quad \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \wedge, \vee\} ; \quad \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \Leftrightarrow\}$$

***Exercice* 3 :**

a. Montrer qu'il existe un unique connecteur φ à trois places tel que, pour tout $t \in \{0,\ 1\}$:

$$\varphi(t, 1-t, t) = \varphi(t, 0, 0) = 1$$
$$\varphi(t, t, 1-t) = \varphi(t, 1, 1) = 0$$

b. Donner une formule normale disjonctive du connecteur défini en a).

d$\star$. Peut-on construire le connecteur $\vee$, par composition, à partir du connecteur φ ?

e. Est-ce que $\{\varphi\}$ est un système complet de connecteurs ?

***Exercice* 4 :** Soit $P = \{p_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble de variables propositionnelles. Pour chacun des ensembles de formules suivants, déterminer Δ^{A_i}.

$A_0 = \emptyset$.

$A_1 = \{p_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$A_2 = \{(p_{n+2} \Rightarrow p_n)\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$\star A_3 = \{p_n \Leftrightarrow (p_{n+1} \vee p_{n+2} \wedge \neg(p_{n+1} \wedge p_{n+2}))\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$A_4 = \{F_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ où $F_n = (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$.

***Exercice* 5 :** Soit $P = \{p_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ un ensemble de variables propositionnelles. On note pour, pour $k \in \mathbb{N}^*$, δ_k la distribution de valeurs de vérité sur P définie par :

$$\delta_k(p_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par δ_∞, celle définie par $\delta_\infty(p_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Donner un ensemble de formules A tel que :

$$\Delta^A = \{\delta_\infty\} \cup \{\delta_k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

b. Donner un ensemble de formules A_m pour $m \geq 0$ tel que :

$$\Delta^{A_m} = \{\delta_\infty\} \cup \{\delta_k\ ;\ k > m\}$$

c$\star$. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble B de formules tel que :

$$\Delta^B = \{\delta_k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

(indication : on peut montrer $\{\delta_k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\} \subset \Delta^A$ implique $\delta_\infty \in \Delta^A$)