

TD 3

Sémantique

Les questions marquées d'une étoile \star sont plus difficiles.

Exercice 1 : On considère la formule $E = ((B \wedge C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (\neg B \vee C)))$, dans laquelle A , B et C sont des variables propositionnelles.

- (1) Dessiner la table de vérité de E .
- (2) Donner une FND de E , aussi réduite que possible.
- (3) Donner une FNC de E , aussi réduite que possible.
- (4) Montrer que les formules $(C \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))))$ et $(C \Rightarrow (B \Rightarrow A))$ sont logiquement équivalentes.
- (5 \star) Donner une formule logiquement équivalente à E , écrite sans autre symbole de connecteur que \Rightarrow et \Leftrightarrow .

Exercice 2 : Quelles sont les distributions de valeur de vérité sur l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ qui satisfont la formule :

$$(p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_3 \Rightarrow p_4) \wedge (p_5 \Rightarrow p_6) ?$$

Exercice 3 : Rappel du cours : on sait que le système $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet.

- (1) Montrer que $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ sont des systèmes de connecteurs complets.
- (2) On considère un nouveau connecteur logique, qu'on note \diamond . Le connecteur \diamond est défini par $(A \diamond B)$ ssi $\neg(A \wedge B)$. Le système $\{\diamond\}$ est-il complet ?
- (3 \star) Montrer que $\{\Rightarrow, \wedge, \vee\}$ n'est pas un système de connecteurs complet.
- (4 \star) Le système $\{\neg, \Rightarrow\}$ est-il complet ?

Exercice 4 : Montrer les équivalences suivantes :

- (1) $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$;
- (2) $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$;
- (3) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$;
- (4) $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;
- (5) $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

Exercice 5 : Soit E l'ensemble des formules suivantes, donner une partition de E en classes d'équivalence pour la relation \sim .

- | | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--|
| 1. $(p \Rightarrow q)$ | 2. $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ | 3. $(p \wedge (p \vee q))$ | 4. $(p \wedge (\neg p \vee q))$ |
| 5. $(p \wedge (p \Rightarrow q))$ | 6. $(p \vee (\neg p \wedge q))$ | 7. $(p \Rightarrow (p \wedge q))$ | 8. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ |

Exercice 6 : Trouver des formules $F[p_1, p_2, p_3]$, $G[p_1, p_2, p_3]$ et $H[p_1, p_2, p_3]$ telles que :

- a. la seule distribution de valeur de vérité qui satisfait F est δ_{010} .
- b. la seule distribution de valeur de vérité qui satisfait G est δ_{011} .
- c. les seules distributions de valeur de vérité qui satisfont H sont δ_{010} et δ_{011} .

Exercice 7 : Trouver une formule F qui contient seulement les connecteurs \neg, \wedge, \vee et qui satisfait le tableau de vérité suivant :

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercice 8 : Déterminer si les formules suivantes sont sous FND, FNC, FNDC ou FNCC :

- (1) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B)$
- (2) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow A)$
- (3) $\neg((A \wedge B) \vee C)$
- (4) $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$
- (5) $A \wedge \neg B$
- (6) $(A \wedge B) \vee \neg C \vee A$
- (7) $A \wedge B \wedge (\neg A \vee A)$

Exercice 9 : (DST 2009) Trouver deux formules l'une sous forme FND utilisant au plus une disjonction, l'autre sous forme FNC utilisant au plus une conjonction, dont le tableau de vérité est le suivant :

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Exercice 10 : Trouver des formules sous forme FND et FNC équivalentes aux formules suivantes :

- (1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)$
- (2) $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C)) \wedge D$
- (3) $\neg(A \wedge B \wedge (C \Rightarrow D))$
- (4) $\neg(A \Leftrightarrow B)$

Exercice 11 : (DST 2009) Donner la définition d'un système complet.

Exercice 12 : La formule $\neg(p \Rightarrow r)$ est-elle conséquence de l'ensemble de formules $\{(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)), \neg(p \Rightarrow q)\}$?