Université Paris 7 **21 septembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 2

Nombres entiers, induction et début du calcul propositionnel

***Exercice* 1 :** Soient A, B des ensembles, et f une application de A dans B. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels tel qu'il a été défini en cours.

(1) Exprimer par une formule la proposition : "f est bijective de A dans B".
(2) Exprimer par une formule, à l'aide de $\mathbb{N}$, la proposition : "l'ensemble A est fini".
(3) Exprimer par une formule la proposition : "l'image de f est infinie".

***Exercice* 2 :** (Preuves par induction)
Montrer par induction sur $\mathbb{N}$ les propriétés suivantes :

(1) Tout élément d'un entier est un entier.
(2) Pour tout entier n, on a $n = \bigcup n^+$.
(3) Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in n$, alors $m \subset n$.
(4) Pour tout entier n, on a $n \notin n$.
(5) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \subset n$. Alors on a $m \in n$ ou $m = n$.
(6) Soient $m, n \in \mathbb{N}$, alors $m \subset n$ ou bien $m = n$ ou bien $n \subset m$ (c'est à dire la relation d'inclusion est un ordre total sur $\mathbb{N}$).
(7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : n \to n$. Alors f est injective si et seulement si f est surjective.

***Exercice* 3 :** (Définitions par induction)

(1) Définir par induction la fonction qui à n associe la valeur 0 si n est pair et 1 si n est impair.
(2) Montrer l'existence de l'ensemble des suites finies de 0 et 1 (c.à.d. des fonctions $f : n \to \{0, 1\}$ où n est un entier).
(3) Définir par induction la fonction qui à n associe l'ensemble des suites finies de 0 et 1 avec exactement n alternances de 0 et de 1.
(4) Définir par induction la somme et le produit de deux entiers.

***Exercice* 4 :** Soit E un ensemble non vide muni d'une relation binaire R symétrique. On fixe $a \in E$. Montrer qu'il existe un plus petit sous-ensemble A contenant a qui est clos pour la relation R (c'est-à-dire $\forall x \in A, \forall y, (xRy \vee yRx) \implies y \in A$).
Indication : penser à la démonstration de l'existence de $\mathbb{N}$ vue en cours ; il y a deux manières.

***Exercice* 5 :** (Formules Propositionnelles)
Est-ce que les mots suivants sont des formules propositionnelles, sur l'ensemble de variables propositionnelles $P = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$?

$$F \Rightarrow (G \wedge H) \qquad ((G \Leftrightarrow G) \Rightarrow G) \qquad (P \Rightarrow \neg P)$$
$$(A \vee B \vee C) \qquad \neg(\neg A) \qquad C$$
$$(\neg C) \Leftrightarrow (\neg B) \qquad \neg(A \wedge B) \qquad ((E \wedge B))$$

***Exercice* 6 :** (Théorème de Lecture Unique)
Montrer sans utiliser le Théorème de lecture unique que toutes les formules G, H satisfont les inégalités suivantes :

(1) $h[\neg G] \leq h[G] + 1$;
(2) $h[(G \alpha H)] \leq \max\{h[G], h[H]\} + 1$ (α étant un connecteur binaire arbitraire).

Montrer en utilisant le Théorème de lecture unique que toutes les formules G, H satisfont les propriétés suivantes :

(1) $h[\neg G] = h[G] + 1$;

(2) $h[(G\alpha H)] = \max\{h[G], h[H]\} + 1$ (α étant un connecteur binaire arbitraire).

***Exercice* 7 :** (Induction sur les Formules)
Montrer par induction sur les formules que toutes les formules G satisfont la propriété suivante :

- $h[G] < lg[G]$.

***Exercice* 8 :** Pour chaque formule F du calcul propositionnel, on note $\nu[F]$, $n[F]$, $b[F]$, $o[F]$ et $f[F]$ le nombre d'occurences de variables propositionnelles, du symbole de négation, de symboles de connecteur binaire, de la parenthèse ouvrante et de la parenthèse fermante dans F.

- Démontrer par induction que, pour toute formule F, $\nu[F] = b[F] + 1$.

***Exercice* 9 :** P est l'ensemble des variables propositionnelles. Montrer par induction sur les formules que:

(1) $F \in P$ ou F commence par $\neg$ ou F commence par (.
(2) F contient au moins une variable propositionnelle.

***Exercice* 10 :** (Tables de Vérité) Ecrire la table de vérité des formules suivantes:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \qquad (A \vee \neg C) \Leftrightarrow B \qquad (A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee A)$$
$$\neg A(\Rightarrow \neg B) \vee (\neg A \Leftrightarrow B) \qquad ((A \wedge B) \vee \neg C) \Rightarrow \neg(B \vee C)$$

***Exercice* 11 :** (Tautologies) Pour chacune des formules propositionnelles ci-dessous, déterminer si il s'agit d'une tautologie.

$$\neg F \Rightarrow \neg F \qquad F \Rightarrow (G \Rightarrow F) \qquad (F \Rightarrow G) \Rightarrow F$$
$$F \Rightarrow (G \wedge F) \qquad F \Rightarrow (G \vee F) \qquad F \wedge (F \Rightarrow G)$$
$$F \vee (F \Rightarrow G) \qquad F \vee \neg\neg(F \Rightarrow \neg F) \qquad (F \vee \neg G) \wedge (\neg F \vee G)$$