Université Paris 7 **16 septembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 1

Axiomes de la théorie des ensembles

***Exercice* 1 :**

(1) Si $A = \{\{x, \{y\}\}, \{z\}\}$, que vaut $\bigcup A$? Et si $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?

(2) Montrer que pour tous ensembles a, b, on a : $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$.

***Exercice* 2 :** Parmi les cinq expressions suivantes, quelles sont celles qui, quel que soit a, sont égales à l'ensemble a lui-même ?

$$\bigcup a \ ; \ \bigcup_{x \in a} x \ ; \ \bigcup_{x \in a} \{x\} \ ; \ \bigcup \mathcal{P}(a) \ ; \ \bigcup (P(a) - \{\emptyset\}) \ .$$

***Exercice* 3 :** Montrer que, pour tout x, pour tout y, pour tout z, il existe a dont les seuls éléments sont x, y et z. (utiliser les axiomes de la théorie des ensembles)

***Exercice* 4 :** Démontrer que l'ensemble de tous les singletons n'existe pas.

***Exercice* 5 :** A l'aide du lemme de Zorn, démontrer que tout espace vectoriel admet une base. Indication : montrer d'abord que l'ensemble des familles libres de vecteurs est inductif pour la relation d'inclusion.

***Exercice* 6 :** Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont toujours vraies ?

$$a \subset a \ ; \ a \in a \ ; \ a \subset \{a\} \ ; \ \{a\} \subset a \ ; \ \{a\} \in \mathcal{P}(a) \ ; \ \{a\} \subset \mathcal{P}(a) \ ; \ a \subset \mathcal{P}(a).$$

***Exercice* 7 :** Quel sont les éléments de $\mathcal{P}(\emptyset)$? de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$? de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

***Exercice* 8 :** Montrer que l'on a quels que soient les ensembles A et B :

$$\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

***Exercice* 9 :** Montrer que $B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ et que si $A \neq \emptyset$, alors $\emptyset^A = \emptyset$.

***Exercice* 10 :** Lesincludions suivantes sont-elles toujours vraies ?

$$\mathcal{P}(A \times B) \supset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \ ?$$
$$\mathcal{P}(A \times B) \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \ ?$$

***Exercice* 11 :** Montrer que si l'un des a_i est vide, alors $\prod_{i \in I} a_i = \emptyset$ et si $I = \emptyset$, alors $\prod_{i \in I} a_i = \{\emptyset\}$.

***Exercice* 12 :** Montrer que, pour tout ensemble X, il existe un ensemble p dont les éléments sont précisément les $\mathcal{P}(x)$ pour $x \in X$.

***Exercice* 13 :** Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ et chaque $j \in \mathbb{N}$ on note $A_{i,j}$ l'ensemble $[i - j, i + j]$ des entiers relatifs compris entre $i - j$ et $i + j$;

Déterminer les sous-ensembles U et V suivants de $\mathbb{Z}$:

$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j} \qquad V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j}$$

***Exercice* 14 :** On note pour chaque entier naturel n, $X_n = \{n\}$ et $Y_n = \{p \in \mathbb{N} ; \ p \geq n\}$.

(a) Donner une description de l'ensemble $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, produit de la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Donner trois éléments distincts de l'ensembe $\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, produit de la famille $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.