Université Paris 7 **13 septembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

TD 0

Exercices d'entraînement sur les formules

***Exercice* 1 :** On considère l'ensemble des habitants d'un village, et P la relation binaire telle que $P(x,y)$ ssi x est un parent (père ou mère) de y. Exprimer à l'aide de formules les propositions suivantes :

(1) Il existe une villageois qui n'a pas d'enfant.
(2) Chaque villageois a exactement deux parents.
(3) Aucune villageois n'est grand-parent de lui-même.

Expliquer en français, le plus simplement possible, le sens des formules suivantes :

(1) $\exists\, x\, \forall\, y\, \neg R(x,y)$
(2) $\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, (R(x,z) \wedge R(y,z) \implies \neg R(x,y))$
(3) $\forall x\, \exists\, F \big(x \in F \wedge (\forall\, y, y \in F \implies (\forall\, z\, (R(y,z) \vee R(z,y)) \implies z \in F)) \wedge \exists\, y, y \notin F$

***Exercice* 2 :** Expliquer en français la signification des énoncés suivants :

(1) $\forall\, x\, \forall\, y\, x = y$
(2) $\forall\, x\, \exists\, y\, x \neq y$
(3) $\forall\, x\, \forall\, y\, ((x < y) \Rightarrow (\exists\, z\, (x < z \wedge z < y))$ ($<$ symbolise une relation binaire))
Déterminer si cet énoncé est satisfait par la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ (sur $\mathbb{R}$).
(4) $\forall\, v\, \forall\, w (f(v) = f(w) \Rightarrow v = w)$ (f symbolise une fonction unaire)
Déterminer si cet énoncé est satisfait par la fonction $x \mapsto x^2$ (dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$).

***Exercice* 3 :** Trouver une formule (en utilisant $\forall, \exists, =, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, x, y, z...$, et aussi f, A, B et E dans (3) et (4), respectivement) qui est vraie dans un ensemble M ssi

(1) M contient au moins 5 éléments (2 à 2 distincts).
(2) M contient exactement 3 éléments.
(3) f est une fonction surjective de A dans B.
(4) E est une relation d'équivalence.

***Exercice* 4 :** Soit $<$ une relation binaire et f une fonction unaire (une fonction à une variable).

(1) Exprimer par une formule : "$<$ est une relation transitive".
(2) Trouver une formule qui est vraie pour la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$, mais faux dans $\mathbb{Z}$; même question pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.
(3) Exprimer par une formule: f est constante.
(4) Exprimer par une formule: f n'a pas de point fixe.

***Exercice* 5 :** Soient $+$ et $\times$ des (symboles de) fonctions binaires, 0 et 1 des (symboles de) constantes. On considère le corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$. Exprimer par une formule (utilisant $+, \times, 0, 1$ outre les symboles logiques):

(1) Tout polynôme de degré 3 a une racine dans $\mathbb{R}$.
(2) Il existe un polynôme de degré 2 qui n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
(3) -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{R}$.
(4) Toute somme de carrés est un carré.