**Université Paris 7**
**U4MC35**

**PARTIEL du 29 Novembre 2011**
**Durée : 3 H**

## I. (3 pts)

Un ensemble réfutable de clauses est dit *minimal* si toute partie propre[1] est satisfaisable.

Montrer que l'ensemble de clauses

$$\Gamma = \{B \wedge A \Rightarrow,\ \Rightarrow A \vee C,\ \Rightarrow D \vee B,\ A \wedge D \Rightarrow B,\ C \Rightarrow A\}$$

est réfutable minimal.

Dans ce qui suit, $a$ et $c$ sont des symboles de constantes, $f$, $g$ des symboles de fonction binaires, $h$ un symbole de fonction unaire, $A$ et $B$ des symboles de relation binaire, $R$ et $S$ sont des symboles de relation unaire.

## II. (3 pts)

1. Unifier le système suivant :

$$\{\ (ffgv_4v_1fv_3v_5fgv_7av_0, fv_0fgv_7afv_{11}v_{12});\ (gv_6v_8, ggv_9v_3gv_9v_{10})\ \}$$

2. Soit $\sigma$ une substitution et $t$ un terme et on suppose que $\sigma(t) = t$. Montrer que si $v$ a une ocurrence dans $t$, alors $\sigma(v) = v$.

## III. ( 6 pts )

1. On considère le langage $\mathcal{L}_1 = \{f, h\}$ et la $\mathcal{L}_1$-structure $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \times, \mathrm{succ} \rangle$.
   Donner la valeur des formules $\psi_i$, $i = 1, 2$ dans $\mathfrak{N}$ :
   – $\psi_1[v, w] = \exists x\ hx \simeq fvw$
   – $\psi_2[v, w] = \exists x\, \forall v\ (v \simeq hx \Longrightarrow fvw \simeq w)$
2. On considère le langage $\mathcal{L}_2 = \{a, c, A, f, g\}$ et les $\mathcal{L}_2$-structures $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbb{N}, 0, 2, \leq, +, \times \rangle$ et $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, \subseteq, \cap, \cup \rangle$. Trouver des $\mathcal{L}_2$-formules $\varphi_1[v]$ et $\varphi_2[v]$ telles que $Val(\varphi_i, \mathfrak{M}_i) = E_i$ pour $i = 1, 2$, où :
   – $E_1 = \{\, 3n + 1\, ;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ et
   – $E_2 = \{\, \{n\} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.
3. On considère le langage $\mathcal{L}_3 = \{A\}$ et les $\mathcal{L}_3$-structures suivantes :
   $\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{Z}, \equiv_2 \rangle \quad \mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{Z}, \equiv_3 \rangle \quad \mathfrak{N}_3 = \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$
   Trouver des $\mathcal{L}_3$-énoncés $\varphi_i$ , $i = 1\,, 2$, tels que $\mathfrak{N}_i \models \varphi_i$ et $\mathfrak{N}_{i+1} \models \neg\varphi_i$.
4. On considère le langage $\mathcal{L}_4 = \{c, f, g\}$ et le $\mathcal{L}_4$-énoncé

$$\phi = \forall y \forall z \exists x\ (\neg y \simeq c \Longrightarrow gfxyz \simeq c).$$

   Trouver deux $\mathcal{L}_4$-structures $\mathfrak{N}_1$ satisfaisant $\phi$ et $\mathfrak{N}_2$ satisfaisant $\neg\phi$.

[1] $A$ est une partie propre de $B$ si $A \subset B$ et $A \neq B$.

## IV. ( 4 pts )

On dit qu'une formule est *anti-prénexe* si elle ne contient aucune sous-formule qui est équivalente à une formule de type suivant :

*(i)* $\forall x(G \wedge H)$, $\exists x(G \vee H)$, $\exists x(G \Rightarrow H)$,

*(ii)* $Qx\, G$, avec $x$ n'est pas libre dans $G$ [2],

*(iii)* $\forall x(G \vee H)$, $\exists x(G \wedge H)$, $\forall x(G \Rightarrow H)$, avec $x$ n'est pas libre dans $G$ ou $x$ n'est pas libre dans $H$.

Pour chacune des formules suivantes $F_i$, $1 \leq i \leq 4$, donner une forme prénexe $G_i$ et une formule anti-prénexe $H_i$ équivalente à $F_i$.

$$F_1 = \forall\, x\ (\, Rx \Longrightarrow\ \exists\, y\, Sy)$$

$$F_2 = \forall\, x \exists\, y (\forall\, x\ Axy \Rightarrow \exists\, t\ Bzx)$$

$$F_3 = \forall\, x\, \exists\, y\ (\,(Axy \Longleftrightarrow \neg \forall\, z\, Bxz) \wedge x \simeq v)$$

$$F_4 = \forall x \forall y \exists v \forall z\ ((\exists t(Atx \wedge Aty) \wedge \exists t(Aty \wedge Atz)) \Rightarrow \exists t(Aut \Rightarrow \forall u(Aux \wedge Auz))).$$

## V. ( 4 pts )

Etant donné un ensemble $E$, un graphe sur $E$ est une relation binaire $G$ [3] symétrique et antiréflexive [4].

Si $k$ est un entier naturel non nul et si $G$ est un graphe sur E, on dit que $G$ est *$k$-coloriable* si et seulement si il existe une application $f$ de $E$ dans $\{1, 2, \ldots, k\}$ telle que, pour tout $(x, y) \in G$, $f(x) \neq f(y)$.

Soit $P$ l'ensemble des variables propositionnelles $\{p_{x,i}\ ;\ (x, i) \in E \times \{1, 2, \ldots, k\}\ \}$. Trouver un ensemble $\mathfrak{F}$ de formules propositionnelles sur $P$ tels que :

$\mathfrak{F}$ est satisfaisable si et seulement si le graphe $G$ est $k$-coloriable.

---

[2] $Q$ est un quantificateur.

[3] $G \subset E \times E$.

[4] Pour tout $x \in E$, $(x, x) \notin G$.