Université Paris 7 **30 novembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du partiel

I.

On applique d'abord la méthode des coupures pour vérifier que l'ensemble est réfutable.

$\Gamma_0 = \{\underset{①}{B \wedge A \Rightarrow},\ \underset{②}{\Rightarrow A \vee C},\ \underset{③}{\Rightarrow D \vee B},\ \underset{④}{A \wedge D \Rightarrow B},\ \underset{⑤}{C \Rightarrow A}\}$

$\Gamma_0 \overset{\%C}{\to} \Gamma_1 = \{\underset{⑥:2,5}{\Rightarrow A},\ \underset{①}{B \wedge A \Rightarrow},\ \underset{③}{\Rightarrow D \vee B},\ \underset{④}{A \wedge D \Rightarrow B}\}$

$\Gamma_1 \overset{\%D}{\to} \Gamma_2 = \{\underset{⑦:3,4}{A \Rightarrow B},\ \underset{⑥}{\Rightarrow A},\ \underset{①}{B \wedge A \Rightarrow}\}$

$\Gamma_2 \overset{\%B}{\to} \Gamma_3 = \{\underset{⑧:1,7}{A \Rightarrow},\ \underset{⑥}{\Rightarrow A}\}$

$\Gamma_3 \overset{\%A}{\to} \Gamma_4 = \{\square\}$

Pour vérifier que Γ est réfutable minimal, il faut montrer que tout sous-ensemble propre est satisfaisable. Or tout sous-ensemble d'un ensemble satisfaisable est satisfaisable (avec la même distribution de valeurs de vérité). Il suffit donc de traiter les cinq cas où un seule clause a été supprimée. On trouve une distribution de valeur de vérité pour chaque cas :

	A	B	C	D
{②, ③, ④, ⑤}	1	1	0	0
{①, ③, ④, ⑤}	0	1	0	1
{①, ②, ④, ⑤}	1	0	1	0
{①, ②, ③, ⑤}	1	0	1	1
{①, ②, ③, ④}	0	0	1	0

II.

(1) $S_0 = \{\ (ffgv_4v_1fv_3v_5fgv_7av_0, fv_0fgv_7afv_{11}v_{12});\ (gv_6v_8, ggv_9v_3gv_9v_{10})\ \}$
Simplification : $S_1 = \{(fgv_4v_1fv_3v_5, v_0);\ (fgv_7av_0, fgv_7afv_{11}v_{12});\ (v_6, ggv_9v_3);\ (v_8, gv_9v_{10})\}$
Résolution : $\sigma_1 : v_0 \mapsto fgv_4v_1fv_3v_5,\ v_6 \mapsto ggv_9v_3,\ v_8 \mapsto gv_9v_{10}$
$S_2 = \{(fgv_7afgv_4v_1fv_3v_5, fgv_7afv_{11}v_{12})\}$
Simplification : $S_3 = \{(gv_7a, gv_7a);\ (fgv_4v_1fv_3v_5, fv_{11}v_{12})\}$
Ménage : $S_4 = \{(fgv_4v_1fv_3v_5, fv_{11}v_{12})\}$
Simplification : $S_5 = \{(gv_4v_1, v_{11});\ (fv_3v_5, v_{12})\}$
Résolution : $\sigma_2 : v_{11} \mapsto gv_4v_1,\ v_{12} \mapsto fv_3v_5$
$S_6 = \emptyset$

On obtient finalement comme unificateur principal $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

$$\begin{aligned} \sigma : v_{11} &\mapsto gv_4v_1 \\ v_{12} &\mapsto fv_3v_5 \\ v_0 &\mapsto fgv_4v_1fv_3v_5 \\ v_6 &\mapsto ggv_9v_3 \\ v_8 &\mapsto gv_9v_{10} \end{aligned}$$

(2) On procède par induction sur la structure du terme t. L'hypothèse d'induction est : si $\sigma(t) = t$ alors pour toute variable v qui apparaît dans t, $\sigma(v) = v$.

Si t est une variable ou une constante, la propriété est clairement vraie.

Sinon $t = ft_1 \dots t_n$ pour une certaine fonction f d'arité n. Dans ce cas, on a $\sigma(t) = f\sigma(t_1)\dots\sigma(t_n)$, donc $\sigma(t) = t$ implique $\sigma(t_i) = t_i$ pour tout i (théorème de lecture unique des termes). On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à chaque t_i et on déduit que pour chaque variable v qui apparaît dans t_i, $\sigma(v) = v$. Or toute variable qui apparaît dans t apparaît dans un des t_i, donc on a montré l'hypothèse d'induction pour t.

III.

(1)
- $Val(\psi_1[v,w], \mathfrak{N}) = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : m > 0 \wedge n > 0\} = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
- $Val(\psi_2[v,w], \mathfrak{N}) = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Noter que dans ψ_2, la variable v n'est pas libre dans la formule. Par ailleurs la formule est toujours vraie dans $\mathfrak{N}$ (il suffit de prendre $x = 0$).

(2) On peut prendre :
- $\varphi_1[v] = \exists u(fuu \simeq c \wedge \exists x\ v \simeq fugxffuuu)$
- $\varphi_2[v] = \neg x \simeq a \wedge \forall x(Axv \Rightarrow (x \simeq a \vee x \simeq v))$

(3) On peut prendre :
- $\varphi_1[v] = \exists x \exists y \forall z(Azx \vee Azy)$
- $\varphi_2[v] = \forall x \forall y(Axy \Rightarrow Ayx)$

(4) On peut prendre :
- $\mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{R}, 0, \times, + \rangle$
- $\mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{Z}, 0, \times, + \rangle$

IV.

$G_1 = \forall x \exists y(Rx \implies Sy)$
$H_1 = \exists x Rx \implies \exists y Sy$
$G_2 = \forall x \exists y \exists w(Awy \implies Bzx)$
$H_2 = \forall y \forall w Awy \implies \forall x Bzx$
$G_3 = \forall x \exists y \exists w \forall z(((Axy \wedge \neg Bxw) \vee (\neg Axy \wedge Bxz)) \wedge x \simeq v)$
$H_3 = \forall x \exists y(Axy \Longleftrightarrow \neg\forall z Bxz) \wedge \forall x\ x \simeq v$
$G_4 = \forall x \forall y \forall z \forall t_1 \forall t_2 \exists t \forall w(((At_1x \wedge At_1y) \wedge (At_2y \wedge At_2z)) \Rightarrow (Aut \Rightarrow (Awx \wedge Awz)))$
$H_4 = \forall x \forall z(\exists y(\exists t(Atx \wedge Aty) \wedge \exists t(Aty \wedge Atz)) \Rightarrow (\forall t Aut \Rightarrow (\forall u Aux \wedge \forall u Auz)))$

V.

Informellement, on va utiliser la variable $p_{x,i}$ pour coder la fait que le sommet x est colorié avec la couleur i.

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble contenant les formules suivantes :
- La formule $\neg(p_{x,i} \wedge p_{y,i})$ pour chaque couleur i et chaque arête $(x,y) \in G$. Ainsi deux sommets adjacents ne sont jamais coloriés de la même couleur.
- La formule $\bigvee_{i\in\{1,\dots,k\}} p_{x,i}$ pour chaque sommet x ; et la formule $p_{x,i} \implies \bigwedge_{j\in\{1,\dots,k\}, j\neq i} \neg p_{x,j}$ pour chaque sommet x et chaque couleur i. Ces formules assurent qu'à chaque sommet est attribuée une couleur et une seule.

Cet ensemble de formules est satisfaisable ssi G est k-coloriable.