Université Paris 7 **13 Décembre 2011**
U4MC35

Correction du DST 3

Question de cours : un ensemble est primitif récursif ssi sa fonction caractéristique est primitive récursive.

I.

1. (5) $(Rv_0v_1c \wedge Rv_1ffdv_4 \wedge Rv_0v_4d) \Rightarrow$: coupure de (1), (2) % Rcv_2d, par unification de Rcv_2d avec $Rv_3v_2v_5$ par l'unificateur $v_3 \mapsto c, v_5 \mapsto d$
   (6) $(Rdv_1c \wedge Rv_1ffdc) \Rightarrow$: coupure (5), (3) % $Rdcd$, par unification de Rv_0v_4d avec $Rdcd$ par l'unificateur $v_0 \mapsto d, v_4 \mapsto c$
   (7) $Rfdffdc \Rightarrow$: coupure de (4), (6) % $Rdfdc$, par unification de Rv_0fv_0d avec Rdv_1c par l'unificateur $v_0 \mapsto d, v_1 \mapsto fd$
   (8) $\square$: coupure de (4), (7) % $Rfdffdc$, par unification de Rv_0fv_0d avec $Rfdffdc$ par l'unificateur $v_0 \mapsto fd$
2. On a dérivé la clause vide, donc le système de clause est réfutable.

II.

1. $\exists x\,(Ax \Rightarrow \forall yAy)$: si l'ensemble est non-vide, la formule est équivalente à $(\forall xAx \Rightarrow \forall yAy)$ par les règles de calcul sur les quantificateurs, donc elle est vraie ssi l'ensemble de base est non-vide.
2. $\forall x\exists y\,(Ax \bigwedge \neg Ay)$: si l'ensemble est non-vide, la formule est équivalente à $(\forall xAx \wedge \neg\forall yAy)$, donc elle est fausse ssi l'ensemble de base est non-vide.
3. $\forall x\forall y\,(Ax \Rightarrow Ay)$: la formule est vraie dans $\langle \mathbb{N}, \mathbb{N}\rangle$, fausse dans $\langle \mathbb{N}, \{0\}\rangle$ (en prenant $x = 0$, $y \neq 0$).
4. $(\forall x\exists y\,(Ax \Rightarrow By) \Rightarrow \exists y\forall x\,(Ax \Rightarrow By))$: si l'ensemble de base est non-vide, la formule est équivalente à $((\exists xAx \Rightarrow \exists yBy) \Rightarrow (\exists xAx \Rightarrow \exists yBy))$, donc elle est vraie ssi l'ensemble de base est non-vide.
5. $\forall x\forall y\ \exists z\,((Pxx \bigvee Pxy) \Rightarrow Pxz)$: la formule est universellement vraie ; en effet si on a $(Pxx \vee Pxy)$ on a Pxz en prenant $z = x$ si Pxx, $z = y$ sinon.
6. $\exists x\exists y\exists z\,(Pxy \bigwedge Pyz \bigwedge \neg Pzx)$: la formule est vraie dans $\langle \mathbb{N}, <\rangle$, fausse dans $\langle \emptyset, \emptyset\rangle$.
7. $\exists x\exists y\forall z\,(\neg Pxy \bigwedge Pyx \bigwedge Pxz)$: la formule est toujours fausse, comme on le voit en prenant $z = y$. On peut aussi justifier en distribuant les quantificateurs $\exists y$ et $\forall z$, et en constatant que le premier et le dernier terme de la conjonction sont alors négations l'un de l'autre.

III.

1. (Si on compte le i-ième chiffre à partir de la droite) On constate que le i-ième chiffre dans l'écriture décimale de n peut s'exprimer par $n/10^{i-1} - 10 \cdot \lfloor n/10^i \rfloor$, en renvoyant 0 si $i = 0$ grâce à une définition par cas. Tous les calculs qui interviennent sont primitifs récursifs.
   (Si on compte à partir de la gauche) On peut se ramener au cas précédent en comptant le nombre k de chiffres de n et en observant que le i-ième chiffre à partir de la gauche est le $(k + 1 - i)$-ième chiffre à partir de la droite. Pour calculer k on peut appliquer le schéma μ-borné à la relation $10^t > n$ avec la borne $t \leq n$.

2. Un couple (x, y) est premier ssi $\forall i < x\ ((i > 1 \wedge i|x) \Rightarrow \neg i|y)$. Tous les quantificateurs sont bornés, et on sait que la relation de divisibilité est primitive récursive, donc on a fini.

IV.

1. On peut prendre :

$$L_i = \Big(\bigwedge_{n=1}^{4} \bigvee_{j=1}^{4} p_{i,j,n}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{4} \bigwedge_{n=1}^{4} (p_{i,j,n} \Rightarrow \bigwedge_{m \neq n} \neg p_{i,j,m})\Big)$$

   La première partie de l'expression exprime que chacun des nombres 1 à 4 appraît sur la ligne. La deuxième partie exprime le fait que chaque case ne contient pas plus d'un chiffre. On peut remarquer qu'à cause de la première partie, cela implique en fait que chaque case contient exactement un chiffre.

2. On prend :

$$F_1 = \Big(\bigwedge_{n=1}^{4} \bigvee_{i=1}^{2} \bigvee_{j=1}^{2} p_{i,j,n}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{2} \bigwedge_{j=1}^{2} \bigwedge_{n=1}^{4} (p_{i,j,n} \Rightarrow \bigwedge_{m \neq n} \neg p_{i,j,m})\Big)$$

   La formule est la même que dans la question précédente, sauf qu'au lieu de fixer i et de faire varier j de 1 à 4 pour parcourir la ligne i, on fait varier i et j tous deux de 1 à 2, de sorte qu'ils parcourent les quatre cases de la sous-grille G_1.

3. Soif F la conjonction des formules suivantes :
   - les formules L_i pour chaque ligne i, et les analogues C_j pour chaque colonne j ;
   - la formule F_1, et les formules F_2, F_3, F_4 qui expriment la même chose pour les trois autres sous-grilles ;
   - les formules $p_{1,2,a}$, $p_{2,1,b}$, $p_{2,3,c}$, $p_{3,4,d}$ et $p_{4,3,e}$.

Les deux premiers ensembles de formules expriment le fait que chaque ligne, chaque colonne et chaque sous-grille contient les chiffres de 1 à 4 une et une seule fois. Ils assurent donc qu'on obtient une grille de sudoku valide. Le troisième ensemble de formule assure que le sudoku est pré-rempli comme on le souhaite. Ainsi F est satisfaisable ssi la grille de Sudoku pré-remplie a une solution.