Université Paris 7 **14 décembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 9 bis

***Exercice* 1 :**

- On définit récursivement : $f(x+1) = (x+1) \cdot f(x)$, et $f(0) = 1$. Alors $f(x) = x!$, et la fonction est primitive récursive par application du schéma de récurrence à des fonctions primitive récursive.
- On applique le schéma μ-borné à la relation $(t+1)^3 > x$ avec borne $x \mapsto x$.
- On applique le schéma μ-borné à la relation $(t+1)^n > x$ avec borne $(x,n) \mapsto x$.

***Exercice* 2 :** On écrit $\phi(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Prem}(i,n)$, où $\mathrm{Prem}(i,n)$ est la fonction caractéristique de la relation « i est premier avec n », qui est primitive récursive parce qu'elle peut s'exprimer par $\forall k \leq i, (k > 1 \wedge k|i) \Rightarrow \neg k|n$.

***Exercice* 3 :** Soit n un entier. Soit p un nombre premier dans la décomposition de $n!+1$ en facteurs premiers. Alors $p > n$ puisque pour $k \leq n$, $n!+1 \equiv 1$ modulo k. Ainsi on a $n < p \leq n!+1$, donc p témoigne du fait qu'il existe un nombre premier entre n et $n!+1$.

Maintenant soit f définie par $f(0) = 2$ et $f(n+1) = f(n)!$. Cette fonction est primitive récursive par utilisation du schéma de récurrence. Par ailleurs, on déduit du paragraphe précédent que le n-ième nombre premier est plus petit que $f(n)$.

On peut donc trouver le n-ième nombre premier en appliquant le schéma μ-borné à la relation binaire « x est le n-ième premier », avec la borne $(x,n) \mapsto f(n)$. Or on a montré dans le TD 9 que la relation « être premier » est primitive récursive, donc la relation « x est le n-ième premier » est également primitive récursive : il suffit par exemple de l'exprimer par $P(x) = 1 \wedge \sum_{i=2}^{x} P(i) = n$, où $P(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers.

***Exercice* 4 :** On définit par récurrence (avec paramère x) la fonction $f(x,0) = x$ et $f(x,n+1) = g(f(x,n))$. Ainsi la fonction est primitive récursive.

***Exercice* 5 :** Tout d'abord comme a, b, c sont tous positifs, toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est nécessairement négative ; or trouver une solution négative de $ax^2 + bx + c = 0$ revient au même que de trouver une solution positive de $ax^2 - bx + c = 0$. Cela permet de faire tout le calcul dans $\mathbb{N}$, en utilisant la relation $ax^2 + c = bx$ qui est primitive récursive.

Solution 1 : Comme $ax^2 + c = bx$ est primitive récursive, et que (a,b,c) est dans l'ensemble cherché ssi il existe x qui vérifie $ax^2 + c = bx$, il suffit de borner la valeur de x pour que le calcul entier soit primitif récursif. On peut utiliser comme borne $x \leq b + c$. En effet, si $a = 0$ toute solution x de l'équation doit vérifier $x \leq c$, et si $a > 0$ toute solution x doit vérifier $x \leq b$ (sinon on a forcément $ax^2 > bx$), donc dans tous les cas $x \leq b + c$. D'autres bornes sont possibles.

Solution 2 : On utilise la formule connue pour calculer les solutions d'équations du second degré. Dans le cas $a > 0$, on peut calculer si $b^2 > 4ac$. Si la réponse est non, (a,b,c) n'est pas dans l'ensemble. Si oui, on prend $\delta = \lfloor \sqrt{b^2 - 4ac} \rfloor$ et on calcule $n_1 = \lfloor (b+\delta)/2a \rfloor$ et $n_2 = \lfloor (b-\delta)/2a \rfloor$. Si $(ax^2 + c) = bx$ pour $x = n_1$ ou n_2, alors (a,b,c) est dans l'ensemble, sinon il n'y est pas. Si $a = 0$ on procède dans le même esprit. Tous les éléments du calcul sont primitifs récursifs.

***Exercice* 6 :** On sait que l'ensembles des nombres premiers est récursif (voir TD précédent). La fonction $P : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ qui renvoie 1 ssi x est premier est donc primitive récursive. De même on sait que la fonction $\mathrm{Div}(x,y)$ qui renvoie 1 ssi $x|y$, 0 sinon, est primitive récursive. On peut donc poser $\mathrm{DivP}(x,y) = \mathrm{Div}(x,y) \cdot P(x)$, fonction primitive récursive qui renvoie 1 ssi x est un diviseur premier de y, 0 sinon. Enfin on définit la fonction $g(x,n) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{DivP}(i,x)$ qui compte combien il y a de diviseurs premiers de x jusqu'à n, et cette fonction est encore primitive récursive.

Maintenant on pose $f(x,n) = \sum_{i=2}^{x} i \cdot \chi_{=}(g(x,i),n) \cdot \mathrm{DivP}(i,x)$. Cette fonction renvoie i ssi $g(x,i) = n$ et $\mathrm{DivP}(i,x) = 1$, c'est-à-dire ssi il y a n diviseurs premiers de x jusqu'à i et que i est lui-même un diviseur premier ; c'est-à-dire ssi i est le n-ième diviseur premier de x. On a donc montré que la fonction de l'énoncé est primitive récursive.