Université Paris 7 **x décembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 9

On note π_i^k la projection de $\mathbb{N}^k$ sur la i-ième coordonnée.

***Exercice* 1 :** On remarque que, sans le schéma de récurrence, les seules fonctions qu'on peut créer sont de la forme $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto k$ ou $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i + k$ pour $i \leq n$, $k \in \mathbb{N}$. On peut le montrer par induction : en effet, toutes les fonctions de bases (constantes, successeur et projections) vérifient ces deux schémas, et toute composition de ces deux schéma est encore de la même forme.

On aurait aussi bien pu faire l'induction ci-dessus sur la propriété : toutes les fonctions obtenues sont de la forme $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto g(a_i)$ pour une certaine fonction g et un certain $i \leq n$ (autrement dit les fonctions ne tiennent en fait compte que d'un paramètre).

***Exercice* 2 :** On montre d'abord que le singleton $\{0\}$ est primitif récursif. En effet, on peut appliquer le schéma de récurrence aux fonctions f, constante égale à 1 (qui existe par composition de la fonction successeur avec la fonction constante égale à 0), et g, constante égale à 0, ce qui donne la fonction $\chi_{\{0\}}$ définie par $\chi_{\{0\}}(0) = 1$ et $\chi_{\{0\}}(n) = 0$ pour $n > 0$. C'est la fonction caractéristique de $\{0\}$.

On peut observer que $\chi_{\{i+1\}} = \chi_{\{i\}}(i-1)$ donc $\chi_{\{i+1\}}$ est primitive récursive par composition. Par récurrence, on déduit que tous les singletons sont primitifs récursifs.

Enfin, soit $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini d'entiers. Observons $\chi_F = \chi_{\{a_1\}} + \cdots + \chi_{\{a_n\}}$. Or chaque $\chi_{\{a_i\}}$ est primitif récursif par le paragraphe précédent ; et on sait que la somme est primitive récursive. Donc F est primitif récursif.

***Exercice* 3 :**

a- $(y, z) \mapsto f(y, z, y)$ est primitive récursive par composition de la fonction f avec π_1^2, π_2^2, π_1^2.

b- $(x, y, z) \mapsto g(zy, a, y, x + a)$ peut clairement être obtenue par composition de fontions primitives récursives (formellement : par composition de g avec les fonctions $(x, y, z) \mapsto zy$, la fonction constante égale à a, la projection π_2^3, et la fonction $(x, y, z) \mapsto x + a$. Or la fonction $(x, y, z) \mapsto zy$ est primitive récursive par composition de la multiplication avec π_2^3 et π_3^3 ; la fonction constante égale à a est primitive récursive (par a compositions de la fonctions successeur avec la fonction constante égale à 0) ; et la fonction $(x, y, z) \mapsto x + a$ est primitive récursive par composition de la somme avec π_1^3, et la fonction constante égale à a.)

***Exercice* 4 :** Soit f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(n + 1) = 1 - f(n)$ récursivement. Cette fonction est primitive récursive par application du schéma de récurrence à des fonctions primitives récursives. La fonction f est la fonction caractéristique des entiers pairs.

***Exercice* 5 :** Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives.

a- On peut utiliser le schéma μ-borné, appliqué à la relation $P(t, x)$ définie par $2(t+1) > x$ avec la borne $x \mapsto x$. Deuxième méthode : $f(x) = \sum_{i=1}^{x} \chi_{\text{pair}}(i)$, en utilisant l'exercice précédent.

b- On applique le schéma μ-borné à la relation « $(t + 1)^2 > x$ »avec la borne $x \mapsto x$.

c- Cette relation peut s'exprimer par $P(x)$ ssi $\exists i \leq x \exists j \leq x, i^2 + j^2 = x$, donc elle est primitive récursive par application de quantificateurs bornés à une formule dont tous les composants sont primitifs récursifs.

***Exercice* 6 :** Le plus simple est d'utiliser une définition par cas :

$$\sup(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \text{ et } x \geq z \\ y & \text{si } y \geq x \text{ et } y \geq z \\ z & \text{sinon} \end{cases} \qquad \inf(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \text{ et } x \leq z \\ y & \text{si } y \leq x \text{ et } y \leq z \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$

De manière équivalente on peut écrire $\sup(x, y) = y \cdot EGAL((x+1) - y, 0) + x \cdot EGAL(y - x, 0)$. Ensuite $\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z))$. Enfin, $\inf(x, y, z) = x + y + z - \sup(x, y) - \sup(y, z) - \sup(z, x) + \sup(x, y, z)$.

***Exercice* 7 :** A est l'ensemble des entiers de la forme $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^0}}}}}$.

On peut définir la fonction suivante par cas et par récurrence :

$$f(n) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \exists x < n, n = 2^x \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On observe ensuite que $f = \chi_A$.

***Exercice* 8 :**

a- Soit f une fonction de $\mathfrak{F}_p$. Alors son graphe peut être défini par $x = f(y)$, donc il est primitif récursif.

(La fonction d'Ackermann est un contre-exemple parce qu'elle n'est pas primitive récursive. En effet elle croît plus vite qu'aucune fonction primitive récursive. La raison est proche de l'argument diagonal. Par contre son graphe est primitif récursif, essentiellement parce qu'on peut coder un calcul de la fonction et qu'on sait qu'on peut borner ce calcul à partir du résultat)

b- On suppose que le graphe de $f \in \mathfrak{F}_p$ est primitif récursif. Soit Gf la fonction caractéristique du graphe. On suppose aussi que f est bornée par une fonction g primitive récursive de $\mathfrak{F}_p$.

Alors $f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=0}^{g(n)} i \cdot Gf(x_1, \ldots, x_p, i)$, donc f est primitive récursive.

(On peut trouver une fonction non primitive récursive bornée par une fonction primitive récursive, par exemple en énumérant les fonctions primitives récursives croissantes non bornées et en utilisant une variante de l'argument diagonal pour créer une nouvelle fonction croissante non bornée qui croît plus lentement que toutes)

***Exercice* 9 :**

a- On définit q par cas et par schéma μ-borné :

$$q(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ & \text{si } y > 0 \text{ on applique le schéma } \mu\text{-borné à la relation } (t+1)y > x \text{ avec la borne } x \mapsto x \end{cases}$$

b- $x|y$ s'exprime par $y \cdot q(x, y) = x$ donc cette relation est primitive récursive.

c- Soit $\chi(x, y)$ la fonction caractéristique de la relation $x|y$, qui est primitive récursive par la question précédente. La propriété « x est premier » s'exprime par $\sum_{i=2}^{x-1} \chi(i, x) = 0$ donc elle est primitive récursive.

***Exercice* 10 :** Corrigé dans le TD 7.

***Exercice* 11 :** Corrigé dans le TD 7.