Université Paris 7 **x novembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 8

Là où un unificateur n'est pas défini, on sous-entend que c'est l'identité.

***Exercice* 1 :** $S = \{(kfcgv_4v_3\,fcgv_3v_4\,kv_3v_4v_2,\ kv_2v_2v_1)\}$
Simplification : $\{(fcgv_4v_3, v_2), (fcgv_3v_4, v_2), (kv_3v_4v_2, v_1)\}$
Résolution $\sigma_1 : v_2 \mapsto fcgv_4v_3$, reste : $\{(fcgv_3v_4, fcgv_4v_3), (kv_3v_4fcgv_4v_3, v_1)\}$
Résolution $\sigma_2 : v_1 \mapsto kv_3v_4fcgv_4v_3$, reste : $\{(fcgv_3v_4, fcgv_4v_3)\}$
Simplification : $\{(c, c), (gv_3v_4, gv_4v_3)\}$
Ménage : $\{(gv_3v_4, gv_4v_3)\}$
Simplification : $\{(v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$
Résolution $\sigma_3 : v_3 \mapsto v_4$, reste : $\{(v_4, v_4)\}$
Ménage : $\emptyset$
Le système peut donc bien être unifié, et on obtient un unificateur principal $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ avec :

$$\sigma(v_3) = v_4 \qquad \sigma(v_1) = kv_4v_4fcgv_4v_4 \qquad \sigma(v_2) = fcgv_4v_4$$

***Exercice* 2 :** $S = \{(fv_1gdv_0, ffcv_2gfv_1v_1c)\}$
Simplification : $\{(v_1, fcv_2), (gdv_0, gfv_1v_1c)\}$
Résolution, $v_1 \mapsto fcv_2$, reste : $\{(gdv_0, gffcv_2fcv_2c)\}$
Simplification : $\{(d, ffcv_2fcv_2), (v_0, c)\}$
Le système ne peut pas être unifié : en effet $(d, ffcv_2fcv_2)$ est incompatible car d est constante et $ffcv_2fcv_2 \neq d$.

***Exercice* 3 :** Tout d'abord, avant d'appliquer la résolution, on sépare les noms de variables utilisées dans les deux clauses :

$$Sv_0 \Rightarrow (Pv_0 \vee Rv_0) \qquad (Pv_2 \wedge Pfv_3) \Rightarrow Qv_2v_3$$

Les seules termes qu'on peut unifier sont Pv_0 avec Pv_2, et Pv_0 avec Pfv_3.

Dans le premier cas, on utilise la substitution $\sigma : v_2 \mapsto v_0$; les deux clauses deviennent donc :

$$Sv_0 \Rightarrow (Pv_0 \vee Rv_0) \qquad (Pv_0 \wedge Pfv_3) \Rightarrow Qv_0v_3$$

Et la coupure par Pv_0 donne la nouvelle clause :

$$(Sv_0 \wedge Pfv_3) \Rightarrow (Rv_0 \vee Qv_0v_3)$$

Dans le second cas on utilise la substitution $\sigma : v_0 \mapsto fv_3$, et on obtient de la même façon la nouvelle clause :

$$(Sfv_3 \wedge Pv_2) \Rightarrow (Rfv_3 \vee Qv_2v_3)$$

***Exercice* 4 :**

a) (7) $Qfc \Rightarrow$: coupure de (1), (6) % Sc, par unification de Sv_0 avec Sc par $v_0 \mapsto c$
(8) $Pfc \Rightarrow$: coupure de (3), (7) % Qfc, par unification de Qv_0 avec Qfc par $v_0 \mapsto fc$
(9) $(Pv_1 \wedge Rfcv_1) \Rightarrow$: coupure de (4), (8) % Pfc, par unification de Pv_0 avec Pfc par $v_0 \mapsto fc$
(10) $Pc \Rightarrow Sc$: coupure de (2), (9) % $Rfcc$, par unification de Rfv_0v_0 avec $Rfcv_1$ par l'unificateur $v_0 \mapsto c, v_1 \mapsto c$
(11) $\Rightarrow Sc$: coupure de (5), (10) % Pc, par unification de Pc avec lui-même
(12) $\square$: coupure de (6), (11) % Sc, par unification de Sc avec lui-même

$\star$b) (7) $\Rightarrow Rfcc$: coupure de (2), (6) % Sc, par unification de Sv_0 avec Sc par $v_0 \mapsto c$
(8) $Pc \Rightarrow Pfc$: coupure de (4), (7) % $Rfcc$, par unification de Rv_0v_1 avec $Rfcc$ par l'unificateur $v_0 \mapsto fc, v_1 \mapsto c$
(9) $\Rightarrow Pfc$: coupure de (5), (8) % Pc
(10) $\Rightarrow Qfc$: coupure de (3), (9) % Pfc, par unification de Pv_0 avec Pfc par $v_0 \mapsto fc$

(11) $\Rightarrow Sc$: coupure de (1), (10) % Qfc, par unification de Qfv_0 avec Qfc par $v_0 \mapsto c$
(12) $\square$: coupure de (6), (11) % Sc

Note : pour faire les choses proprement, on aurait d'abord dû séparer les variables utilisées dans toutes les clauses, comme dans l'exercice précédent. Ici il n'y a jamais d'ambiguïté donc on s'est permis de ne pas le faire.

***Exercice* 5 :**

a) Pour n'importe quel système S, S prouve une formule F ssi $S \cup \{\neg F\}$ est contradictoire. (En effet, S prouve F ssi tous les modèles de S satisfont F, ssi aucun modèle de S satisfait $\neg F$, ssi il n'y a aucun modèle de $S \cup \{F\}$, ssi $S \cup \{F\}$ est contradictoire.)

b) Il suffit de faire la coupure de (1) et (2) par rapport à Rv_0gv_0, avec la substitution $v_1 \mapsto gv_0$.

c) On fait la même coupure que dans la question précédente, sauf qu'on utilise la substitution $v_1 \mapsto gc, v_0 \mapsto c$ pour obtenir la première clause, $v_1 \mapsto gc, v_0 \mapsto fc$ pour la seconde. On fait donc la coupure par rapport à $Rcgc$ et $Rfcgfc$ respectivement.

d) L'idée est qu'on a dérivé $\Rightarrow Rcfc$, $\Rightarrow Rfcffc$ et qu'on a depuis la départ $\Rightarrow Rffcc$: on a donc un contrexemple à la clause (4). Formellement, on fait la coupure de la clause $\Rightarrow Rcfc$ et la clause (4) par rapport à $Rcfc$ avec la substitution $v_0 \mapsto c, v_1 \mapsto fc, v_2 \mapsto ffc$, pour obtenir $Rfcffc \wedge Rffcc \Rightarrow$. Puis on fait la coupure de cette clause avec $\Rightarrow Rfcffc$ pour obtenir $Rffcc \Rightarrow$. Enfin on fait la coupure de cette clause avec la clause (4), ce qui donne $\square$.

***Exercice* 6 :**

a) On obtient le système de clauses suivant :
(1) $\Rightarrow Pa$
(2) $Rv_0 \Rightarrow Qav_0$
(3) $(Pv_0 \wedge Sv_1 \wedge Qv_0v_1) \Rightarrow$
(4) $\Rightarrow Rb$
(5) $\Rightarrow Sb$

b) (6) $\Rightarrow Qab$: coupure de (2), (4) % Rb, par unification de Rv_0 avec Rb par $v_0 \mapsto b$
(7) $(Pa \wedge Sb) \Rightarrow$: coupure de (3), (6) % Qab, par unification de Qv_0v_1 avec Qab par l'unificateur $v_0 \mapsto a, v_1 \mapsto b$
(8) $Sb \Rightarrow$: coupure de (1), (7) % Pa
(9) $\square$: coupure de (5), (8) % Sb

***Exercice* 7 :** On considère le langage formé des deux symboles de constante a et b, des symboles de fonction unaire h et k, et des symboles de fonction binaire f et g. Unifier les systèmes suivants :

a) $\{(gv_0ghbgv_2v_3, gggv_5v_1hv_4ghbv_0)\}$
Simplification : $\{(v_0, ggv_5v_1hv_4), (ghbgv_2v_3, ghbv_0)\}$
Résolution $\sigma_1 : v_0 \mapsto ggv_5v_1hv_4$, reste : $\{(ghbgv_2v_3, ghbggv_5v_1hv_4)\}$
Simplification : $\{(hb, hb), (gv_2v_3, ggv_5v_1hv_4)\}$
Ménage : $\{(gv_2v_3, ggv_5v_1hv_4)\}$
Simplification : $\{(v_2, gv_5v_1), (v_3, hv_4)\}$
Résolution $\sigma_2 : v_2 \mapsto gv_5v_1$, reste : (v_3, hv_4)
Résolution $\sigma_3 : v_3 \mapsto hv_4$, reste : $\emptyset$
Ainsi le système est bien unifiable, et on a un unificateur $\sigma = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ avec :

$$\sigma(v_3) = hv_4 \qquad \sigma(v_2) = gv_5v_1 \qquad \sigma(v_0) = ggv_5v_1hv_4$$

b-e) Même principe que ci-dessus, et que les exercices 1 et 2.