Université Paris 7 **15 novembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 7

***Exercice* 1 :** [Prédicats]

1. $\mathfrak{M} = \langle \{0\}, =, = \rangle$; $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{Z}, =, < \rangle$.
2. $\mathfrak{N}_n = \langle \mathbb{Z}, =, R \rangle$ avec xRy ssi $x + 1 \equiv_{n+1} y$.

3$\star$. Toute formule close F conséquence de T est conséquence d'un nombre fini de formules de T (compacité), donc conséquence d'un nombre fini de formules de formules $\neg G_{i1}, \ldots, \neg G_{in}$. La formule F est donc satisfaite dans $\mathfrak{N}_{\max\{i1,\ldots,in\}}$.

4$\star$. Si T était logiquement équivalente à un ensemble fini de formules de L, elle serait logiquement équivalente à la conjonction F de ces formules. Or on a montré en 3 que pour tout F conséquence de T, il existe n tel que $\mathfrak{N}_n \models F$. Mais par ailleurs $\mathfrak{N}_n \not\models T$, donc T et F ne sont pas équivalents, contradiction.

***Exercice* 2 :** [Clauses]

a- Il suffit d'assigner la valeur de vérité 0 à toutes les variables.

b$\star$- S'il n'existe aucune clause de la forme $\Longrightarrow p$, on a fini à cause de (a). Sinon on prend une clause de la forme $\Longrightarrow p$. Cette clause signifie que p est vrai, donc on peut supprimer toutes les clauses où p apparaît à droite (elles sont vraies), et on peut supprimer p dans toutes les clauses où p apparaît à gauche (p n'apporte rien à la conjonction puisqu'il est vrai). Si on a obtenu la clause vide on a fini. Sinon on recommence tant qu'il reste des clauses de la forme $\Longrightarrow p$.

Remarquer qu'à chaque fois on supprime une variable, et on effectue une opération qui demande de regarder une fois chaque clause. Si on considère "regarder une clause" comme une opération de base, le nombre total d'opérations est donc borné par ≪ nombre de variables × nombre de clauses ≫.

***Exercice* 3 :** [Connecteurs] On sait que le système $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet. Il suffit donc de recréer ces trois connecteurs en utilisant α et $\mathbf{0}$.

$\neg a \equiv (a \Rightarrow \mathbf{0}) \equiv \alpha(a, a, \mathbf{0})$
$(a \vee b) \equiv (\neg a \Rightarrow b) \equiv \alpha(\neg a, \neg a, b) \equiv \alpha(\alpha(a, a, \mathbf{0}), \alpha(a, a, \mathbf{0}), b)$
$(a \wedge b) = \neg(\neg a \vee \neg b) \equiv \alpha(\alpha(a, a, \alpha(b, b, \mathbf{0})), \alpha(a, a, \alpha(b, b, \mathbf{0})), \mathbf{0})$

Noter qu'on déduit le troisième cas des deux premiers.

***Exercice* 4 :** [Règle des poids] D'après les arités, f et g comptent pour 1, h et k comptent pour 0, a, b et les variables comptent pour -1. On compte :
$f1g2h2g3v_{10}2v_31g2g3a2g3g4k4h4v_43g4h4v_23v_12g3b2v_81v_00f1g2g3v_92v_31$
$g2v_91v_{10}0f1f2v_01f2g3v_72b1f2v_{11}1v_{12}0f1v_20g1g2v_61v_10v_7 - 1$

Ce mot est donc bien un terme. Comme le f initial compte pour 1, son premier argument correspond au premier 0 obtenu par la suite (en effet, sans le f initial qui compte pour 1, ce 0 serait un -1 donc on aurait jusqu'à ce point un terme complet).
$t_1 = ghgv_{10}v_3ggaggkhv_4ghv_2v_1gbv_8v_0$
$t_2 = fggv_9v_3gv_9v_{10}ffv_0fgv_7bfv_{11}v_{12}fv_2ggv_6v_1v_7$

***Exercice* 5 :** [Structures]

(a) $\phi = \exists x \forall y fxy \simeq x$
ou bien sans utiliser l'égalité $\phi = \exists z \forall x \forall y \neg Rfxzfyz$

(b) On peut prendre $\langle \mathbb{Q}, \times, +, 0 \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, \times, +, 0 \rangle$.

(c) On peut prendre $\phi[x] = \forall y \forall z (gyz \simeq x \Rightarrow (y \simeq x \vee z \simeq x))$.