Université Paris 7 **26 octobre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 5

***Exercice* 1 :** Un méthode générale est d'écrire la table de vérité, puis la transformer en FNC, puis transformer la FNC en ensemble de clauses. Dans la correction, on va simplement faire des calculs.

a.

$$\begin{aligned} F &= (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \end{aligned}$$

On remarque que c'est une tautologie, équivalente à l'ensemble vide de clauses $\emptyset$.

b.

$$\begin{aligned} G &= (\neg(p \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (q \vee \neg(r \Rightarrow p))) \\ &\equiv (p \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)) \vee q \vee (r \wedge \neg p) \\ &\equiv (p \wedge (\neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg r)) \vee q \vee (r \wedge \neg p) \\ &\equiv ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee r \vee q) \wedge (q \vee \neg r \vee q)) \vee (r \wedge \neg p) \\ &\equiv ((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \vee (r \wedge \neg p) \\ &\equiv (p \vee q \vee (r \wedge \neg p)) \wedge (q \vee \neg r \vee (r \wedge \neg p)) \\ &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg r \vee r) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg p) \\ &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg p) \end{aligned}$$

Pour obtenir les étapes 4, 6, 7 on a utilisé la distributivité. On constate que G est équivalente à l'ensemble de clauses :

$$\{\Rightarrow p \vee q \vee r, (p \wedge r) \Rightarrow q\}$$

c. On constate que H est encore une tautologie, donc équivalente à l'ensemble de clauses $\emptyset$.

***Exercice* 2 :** On applique la méthode des coupures.

$\Gamma_0 = \{E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, A \wedge B \underset{C2}{\wedge} D \Rightarrow, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, D \underset{C6}{\Rightarrow} B, D \underset{C7}{\Rightarrow} A\}$

$\overline{\Gamma_0} = \Gamma_0$

$\overline{\Gamma_0} \overset{\%A}{\to} \Gamma_1$:

$\Gamma_1^- = \{A \wedge B \underset{C2}{\wedge} D \Rightarrow\}$

$\Gamma_1^+ = \{D \underset{C7}{\Rightarrow} A\}$

$\Gamma_1^0 = \{E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, D \underset{C6}{\Rightarrow} B\}$

$\Gamma_1 = \{D \underset{C8:C2,C7}{\wedge B \wedge D} \Rightarrow, E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, D \underset{C6}{\Rightarrow} B\}$

$\overline{\Gamma_1} = \{B \underset{C9:C8}{\wedge D} \Rightarrow, E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, D \underset{C6}{\Rightarrow} B\}$

$\overline{\Gamma_1} \overset{\%B}{\to} \Gamma_2$:

$\Gamma_2^- = \{B \underset{C9}{\wedge} D \Rightarrow\}$

$\Gamma_2^+ = \{D \underset{C6}{\Rightarrow} B\}$

$\Gamma_2^0 = \{E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, \}$

$\Gamma_2 = \{\underset{C10:C6,C9}{D \wedge D \Rightarrow}, E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, \}$

$\overline{\Gamma_2} = \{\underset{C11:C10}{D \Rightarrow}, E \wedge F \underset{C1}{\Rightarrow} C \vee D, C \underset{C3}{\wedge} F \Rightarrow, \Rightarrow \underset{C4}{D} \vee E, \Rightarrow \underset{C5}{D} \vee F, \}$

$\overline{\Gamma_2} \overset{\%C}{\to} \Gamma_3$:

$\Gamma_3^- = \{\underset{C3}{C \wedge F \Rightarrow}\}$

$\Gamma_3^+ = \{\underset{C1}{E \wedge F \Rightarrow C \vee D}\}$

$\Gamma_3^0 = \{\underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C4}{\Rightarrow D \vee E}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\Gamma_3 = \{\underset{C12:C1,C3}{E \wedge F \wedge F \Rightarrow D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C4}{\Rightarrow D \vee E}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\overline{\Gamma_3} = \{\underset{C13:C12}{E \wedge F \Rightarrow D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C4}{\Rightarrow D \vee E}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\overline{\Gamma_3} \overset{\%E}{\to} \Gamma_4$:

$\Gamma_4^- = \{\underset{C13}{E \wedge F \Rightarrow D}\}$

$\Gamma_4^+ = \{\underset{C4}{\Rightarrow D \vee E}\}$

$\Gamma_4^0 = \{\underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\Gamma_4 = \{\underset{C14:C4,C13}{F \Rightarrow D \vee D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\overline{\Gamma_4} = \{\underset{C15:C14}{F \Rightarrow D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}, \underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\overline{\Gamma_4} \overset{\%F}{\to} \Gamma_5$:

$\Gamma_5^- = \{\underset{C15}{F \Rightarrow D}\}$

$\Gamma_5^+ = \{\underset{C5}{\Rightarrow D \vee F}, \}$

$\Gamma_5^0 = \{\underset{C11}{D \Rightarrow}\}$

$\Gamma_5 = \{\underset{C16:C5,C15}{\Rightarrow D \vee D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}\}$

$\overline{\Gamma_5} = \{\underset{C17:C16}{\Rightarrow D}, \underset{C11}{D \Rightarrow}\}$

$\overline{\Gamma_5} \overset{\%D}{\to} \Gamma_6$:

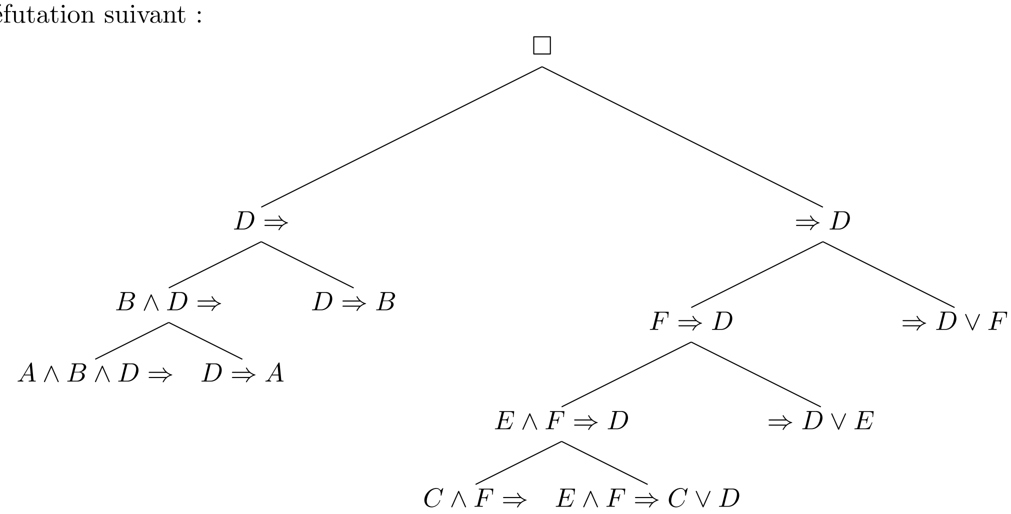
$\Gamma_6^- = \{\underset{C11}{D \Rightarrow}\}$

$\Gamma_6^+ = \{\underset{C17}{\Rightarrow D}\}$

$\Gamma_6^0 = \emptyset$

$\Gamma_6 = \{\Box\}$

L'ensemble de clauses n'est pas satisfaisable. En remontant les calculs précédents, on obtient l'arbre de réfutation suivant :



Exercice 3 : On applique à nouveau la méthode des coupures :

$\Gamma_0 = \{B \underset{C1}{\Rightarrow} F, \Rightarrow \underset{C2}{D} \vee A, F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, D \underset{C6}{\Rightarrow} E, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, A \Rightarrow \underset{C9}{B} \vee C, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\overline{\Gamma_0} = \Gamma_0$

$\overline{\Gamma_0} \overset{\%A}{\to} \Gamma_1$

$\quad \Gamma_1^- = \{A \Rightarrow \underset{C9}{B} \vee C\}$

$\quad \Gamma_1^+ = \{\Rightarrow \underset{C2}{D} \vee A\}$

$\quad \Gamma_1^0 = \{B \underset{C1}{\Rightarrow} F, F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, D \underset{C6}{\Rightarrow} E, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\Gamma_1 = \{\Rightarrow \underset{C11:C2,C9}{B \vee C} \vee D, B \underset{C1}{\Rightarrow} F, F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, D \underset{C6}{\Rightarrow} E, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\overline{\Gamma_1} = \Gamma_1$

$\overline{\Gamma_1} \overset{\%B}{\to} \Gamma_2$

$\quad \Gamma_2^- = \{B \underset{C1}{\Rightarrow} F\}$

$\quad \Gamma_2^+ = \{\Rightarrow B \underset{C11}{\vee} C \vee D\}$

$\quad \Gamma_2^0 = \{F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, D \underset{C6}{\Rightarrow} E, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\Gamma_2 = \{\Rightarrow \underset{C12:C1,C11}{C \vee D} \vee F, F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, D \underset{C6}{\Rightarrow} E, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\overline{\Gamma_2} = \Gamma_2$

$\overline{\Gamma_2} \overset{\%E}{\to} \Gamma_3$

$\quad \Gamma_3^- = \{F \wedge \underset{C3}{E} \Rightarrow\}$

$\quad \Gamma_3^+ = \{D \underset{C6}{\Rightarrow} E\}$

$\quad \Gamma_3^0 = \{\Rightarrow C \underset{C12}{\vee} D \vee F, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\Gamma_3 = \{\underset{C13:C3,C6}{F \wedge D \Rightarrow}, \Rightarrow C \underset{C12}{\vee} D \vee F, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D, C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\overline{\Gamma_3} = \Gamma_3$

$\overline{\Gamma_3} \overset{\%C}{\to} \Gamma_4$

$\quad \Gamma_4^- = \{C \underset{C8}{\Rightarrow} D, C \wedge \underset{C10}{D} \Rightarrow\}$

$\quad \Gamma_4^+ = \{\Rightarrow C \underset{C12}{\vee} D \vee F, \Rightarrow \underset{C7}{C} \vee D\}$

$\quad \Gamma_4^0 = \{F \wedge \underset{C13}{D} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D\}$

$\Gamma_4 = \{\Rightarrow \underset{C14:C8,C12}{D \vee D} \vee F, \underset{C15:C10,C12}{D \Rightarrow D \vee F}, \underset{C16:C8,C7}{\Rightarrow D \vee D}, \underset{C17:C10,C7}{D \Rightarrow D}, F \wedge \underset{C13}{D} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D\}$

$\overline{\Gamma_4} = \{\underset{C18:C14}{\Rightarrow D \vee F}, \underset{C19:C16}{\Rightarrow D}, F \wedge \underset{C13}{D} \Rightarrow, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D\}$

Noter que dans l'étape de ménage ci-dessus on a enlevé les clauses $C15$ et $C17$ qui étaient des tautologies, parce que la variable D apparaissait à la fois à gauche et à droite.

$\overline{\Gamma_4} \overset{\%D}{\to} \Gamma_5$

$\quad \Gamma_5^- = \{F \wedge \underset{C13}{D} \Rightarrow\}$

$\quad \Gamma_5^+ = \{\Rightarrow \underset{C18}{D} \vee F, \underset{C19}{\Rightarrow D}, F \underset{C4}{\Rightarrow} D, \Rightarrow \underset{C5}{F} \vee D\}$

$\quad \Gamma_5^0 = \emptyset$

$\Gamma_5 = \{\underset{C20:C13,C18}{F \Rightarrow F}, \underset{C21:C13,C19}{F \Rightarrow}, \underset{C22:C13,C4}{F \wedge F \Rightarrow}, \underset{C23:C13,C5}{F \Rightarrow F}\}$

Les clauses $C20$ et $C23$ disparaissent parce que ce sont des tautologies : la variable F apparaît à gauche et à droite. Les deux autres clauses se réduisent à une seule clause $\{F \Rightarrow\}$. On constate alors que la variable F apparaît seulement à gauche donc le ménage complet donne :

$\overline{\Gamma_5} = \emptyset$

L'ensemble de clauses de départ est donc satisfaisable.

Pour trouver une distribution de valeurs de vérité δ qui satisfait cet ensemble, on se demande :

- A-t-on supprimé une variable parce qu'elle n'apparaissait que d'un côté pendant une étape de ménage ? Réponse : oui, la variable F. Elle n'apparaissait que à gauche, on choisit donc $\delta(F) = 0$. Si elle n'apparaissait qu'à droite on aurait pris $\delta(F) = 1$. (En effet $G \Rightarrow H \equiv \neg G \vee H$; ce qui est à gauche est faux, ce qui est à droite est vrai)
- Ensuite, on essaie de déduire les valeurs des autres variables en regardant toutes les clauses qu'on a dérivées. Par exemple on a dérivé la clauses $C19 = \Rightarrow D$ au cours du calcul, donc D est vrai. Depuis le début on a aussi $C6 = D \Rightarrow E$, or D est vrai donc E aussi. On a également depuis le début $C10 = C \wedge D \Rightarrow$, qui est équivalent à $\neg C \vee \neg D$, or D est vrai donc C est faux. Restent A et B. On a $C1 = B \Rightarrow F$ et on sait que F est faux donc B est faux. Enfin $C9 = A \Rightarrow B \vee C$ or B et C sont tous deux faux donc A est faux. Si on n'avait pas réussi à déduire une valeur de cette manière on aurait simplement essayé les deux possiblités.

Finalement, l'ensemble de clauses est satisfaisable, avec la distribution δ définie par

$$\delta(A) = 0, \delta(B) = 0, \delta(C) = 0, \delta(D) = 1, \delta(E) = 1, \delta(F) = 0$$

***Exercice* 4 :** La méthode est la même que dans les deux exercices précédents. Pour donner une réfutation, on écrit simplement l'arbre de réfutation ligne par ligne. On commence par des feuilles, et pour chaque nouvelle ligne on précise de quelle(s) ligne(s) on la déduit, et si c'est par coupure ou par ménage. Par exemple la réfutation de l'exercice 2 peut s'écrire :

1- $C \wedge F \Rightarrow$
2- $E \wedge F \Rightarrow C \vee D$
3- $E \wedge F \wedge F \Rightarrow D$: lignes 1 et 2, coupure % C
4- $E \wedge F \Rightarrow D$: ligne 3, ménage
5- $\Rightarrow D \vee E$
6- $F \Rightarrow D \vee D$: lignes 4 et 5, coupure % E
7- $F \Rightarrow D$: ligne 6, ménage
8- $\Rightarrow D \vee F$
9- $\Rightarrow D \vee D$: lignes 7 et 8, coupure % F
10- $\Rightarrow D$: ligne 9, ménage
11- $A \wedge B \wedge D \Rightarrow$
12- $D \Rightarrow A$
13- $B \wedge D \wedge D \Rightarrow$: lignes 11 et 12, coupure % A
14- $B \wedge D \Rightarrow$: ligne 13, ménage
15- $D \Rightarrow B$
16- $D \wedge D \Rightarrow$: lignes 14 et 15, coupure % B
17- $D \Rightarrow$: ligne 16, ménage
18- $\square$: lignes 10 et 17, coupure % D