**Université Paris 7** **11 octobre 2011**
**Licence Math-Info (L3)**
**TD de Logique (Brice Minaud)**

## Correction du TD 3

***Exercice* 1 :**

(1)

| A | B | C | E |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(2) En appliquant directement la technique “ligne par ligne” on a : $E \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$
En simplifiant : $E \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$
Et en simplifiant encore : $E \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee A$

(3) On applique la technique précédente à la table de vérité de $\neg E$ :
$\neg E \equiv \neg A \wedge B \wedge C$
Et on inverse :
$E \equiv A \vee \neg B \vee \neg C$ Noter que cette formule est en fait $FNC$ et $FND$ en même temps (même FNCC, à un seul terme).

(4) Il suffit d'écrire les tables de vérité et de voir qu'elles sont les mêmes. La table obtenue est la même que dans la question (1).

(5$\star$) $E \equiv (C \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C))))$. Pour obtenir cette formule on utilise les équivalences suivantes : $G \Rightarrow H \equiv \neg G \vee H$ et $G \Rightarrow (H \Rightarrow L) \equiv (G \wedge H) \Rightarrow L$.

***Exercice* 2 :** Ce sont toutes les distributions $\delta$ telles que $\delta(p_1) \leq \delta(p_2)$, $\delta(p_3) \leq \delta(p_4)$, et $\delta(p_5) \leq \delta(p_6)$. (Il y a d'autres manières d'écrire la même chose)

***Exercice* 3 :**

(1) On sait que le système $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est complet. Il suffit donc de montrer qu'on peut réécrire ces trois quantificateurs avec les systèmes $\{\neg, \vee\}$ et $\{\neg, \wedge\}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } \{\neg, \vee\} : \neg A &\equiv \neg A \text{ n'est pas modifié ;} \\ (A \wedge B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \ ; \\ (A \vee B) &\equiv (A \vee B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \{\neg, \wedge\} : \neg A &\equiv \neg A \text{ n'est pas modifié ;} \\ (A \wedge B) &\equiv (A \wedge B) \ ; \\ (A \vee B) &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B). \end{aligned}$$

(2) Même principe que précédemment :

$$\begin{aligned} \text{Pour } \{\diamond\} : \neg A &\equiv (A \diamond A) \ ; \\ (A \wedge B) &\equiv \neg(A \diamond B) \equiv (A \diamond B) \diamond (A \diamond B) \ ; \\ (A \vee B) &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv (\neg A \diamond \neg B) \equiv (A \diamond A) \diamond (B \diamond B). \end{aligned}$$

(3⋆) On montre par induction que pour toute formule $F[A]$ à une variable $A$ formée avec $\{\Rightarrow, \wedge, \vee\}$, soit $F$ est une tautologie soit $F \equiv A$. On ne peut donc pas former la négation $\neg A$ avec les quantificateurs $\{\Rightarrow, \wedge, \vee\}$. L'induction est facile, mais noter qu'on fait l'induction sur les formules composées par les connecteurs $\Rightarrow$, $\wedge$, et $\vee$, donc les cas à considérer sont $\Rightarrow$, $\wedge$, et $\vee$, et non pas $\neg$, $\wedge$, et $\vee$ comme d'habitude.

(4⋆)

$$\begin{aligned} \text{Oui ; pour } \{\neg, \Rightarrow\} : \neg A \equiv \neg A & \text{ n'est pas modifé ;} \\ (A \vee B) &\equiv (\neg A \Rightarrow B) \text{ ;} \\ (A \wedge B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B). \end{aligned}$$

***Exercice* 4 :** Dans tous les cas il suffit d'écrire la table de vérité de part et d'autre de l'équivalence et de constater que c'est la même.

***Exercice* 5 :** Il suffit d'écrire les tables de vérité et de regarder quelles formules ont la même table. On obtient 5 classes : (1) $\Leftrightarrow$ (7), (2) $\Leftrightarrow$ (8), (3), (4) $\Leftrightarrow$ (5), (6).

***Exercice* 6 :**
a. $F = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$
b. $G = \neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
c. $H = (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \equiv \neg p_1 \wedge p_2$

***Exercice* 7 :** On peut mettre sous forme normale disjonctive et simplifier :
$F = (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B)$.

***Exercice* 8 :** 1) FNDC, 2) rien, 3) rien, 4) FND, 5) FNC et FNDC, 6) FND, 7) rien (techniquement $A$ ne peut pas apparaître deux fois dans le même terme).

***Exercice* 9 :** En mettant sous forme FND on trouve $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \equiv \neg B \wedge C$. Cette dernière formule est à la fois FND et FNC donc on a fini.

***Exercice* 10 :** Pour trouver la forme FND et FNC équivalente, il y a deux méthodes. Méthode 1, automatique : on écrit d'abord la table de vérité de la formule, et ensuite utiliser la technique habituelle pour écrire une formule FND et FNC à partir de la table de vérité. Méthode 2, plus rapide si elle marche mais pas automatique : on fait des calculs en utilisant des équivalences connues (comme celles montrées dans l'exercice 4).

(1) $\neg B \vee \neg C$ cette formule est FND et FNC.

(2) $A \wedge B \wedge C \wedge D$ cette formule est FND et FNC.

(3) $\neg A \vee \neg B \vee (C \wedge \neg D)$ pour la FND.
$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg D)$ pour la FNC.

(4) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ pour la FND.
$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ pour la FNC.

***Exercice* 11 :** voir cours.

***Exercice* 12 :** Oui. En effet on a $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$, donc cette formule est vraie ssi $p$ est vrai et $q$ est faux. Maintenant comme $p$ est vrai, la formule $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ implique $(q \Leftrightarrow r)$, or on sait que $q$ est faux, donc $r$ est faux. Les deux formules ensemble impliquent donc $p \wedge \neg r$, qui est équivalent à $\neg(p \Rightarrow r)$.

Une manière automatique pour répondre à ce genre de questions c'est de montrer que la conjonctions des formules de l'ensemble considéré $\{\neg(p \Rightarrow q), p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)\}$ implique la formule souhaitée $\neg(p \Rightarrow r)$. Autrement dit, il suffit de montrer que $(\neg(p \Rightarrow q)) \wedge (p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow r)$ est une tautologie. On peut le vérifier avec une table de vérité.