Université Paris 7 **21 septembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 1

***Exercice* 1 :**

(1) Pour $A = \{\{x, \{y\}\}, \{z\}\}$, on a $\bigcup A = \{x, \{y\}, z\}$.
Pour $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, on a $\bigcup A = \{\emptyset\}$.

(2) Pour tout x on a :

$$\begin{aligned} & x \in \bigcup \{a, b\} \\ \Leftrightarrow\ & \exists y \in \{a, b\}, x \in y \\ \Leftrightarrow\ & x \in a \vee x \in b \\ \Leftrightarrow\ & x \in a \cup b \end{aligned}$$

donc $a \cup b = \bigcup \{a, b\}$ (par extensionnalité).

***Exercice* 2 :**

$$a = \bigcup_{x \in a} \{x\} = \bigcup \mathcal{P}(a) = \bigcup (P(a) - \{\emptyset\})$$

***Exercice* 3 :** Soient x, y, z.

- Par l'axiome de la paire, l'ensemble $\{x, y\}$ existe.
- Par l'axiome de la paire, l'ensemble $\{z, z\} = \{z\}$ existe.
- Donc par l'axiome de la paire, l'ensemble $\{\{x, y\}, \{z\}\}$ existe.
- Donc par l'axiome de la réunion, l'ensemble $\{x, y, z\} = \bigcup \{\{x, y\}, \{z\}\}$ existe.

***Exercice* 4 :** Supposons par l'absurde que l'ensemble E de tous les singletons existe. Alors en appliquant le schéma de compréhension à l'ensemble E avec la formule $\{x\} \notin x$, on peut construire l'ensemble $X = \{x \in E : \{x\} \notin x\}$. On alors pour tout y, $\{y\} \in X$ ssi $\{y\} \notin y$. En particulier en prenant $y = X$, on a $\{X\} \in X$ ssi $\{X\} \notin X$, contradiction.

***Exercice* 5 :** On fixe un espace vectoriel quelconque. Soit E l'ensemble de toutes le familles de vecteurs libres, ordonné par l'inclusion.

On montre d'abord que $(E, \subseteq)$ est inductif. On considère donc une chaîne $(X_i)_{i \in I}$ de familles de vecteurs libres. Alors son union $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ est encore libre. En effet, si on prend un nombre fini de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans X, chaque v_k appartient à un certain $X_{f(k)}$, or puisque les $X_{f(k)}$ sont en nombre fini, et qu'ils sont totalement ordonnés (par définition du fait que X est une chaîne), ils possèdent un élément maximal $X_m \in E$ qui contient tous les v_k. Comme X_m est libre, on déduit que les v_k sont libres. On a montré que la famille X est libre, donc c'est un majorant.

Ainsi E est inductif. En appliquant le lemme de Zorn on en déduit qu'il existe une famille maximale de vecteurs libres. On admet qu'une famille maximale de vecteurs libres est une base (c'est un des définitions possibles ; une famille maximale de vecteurs libres est automatiquement génératrice).

***Exercice* 6 :**
$a \subset a$; $\{a\} \subset \mathcal{P}(a)$.

***Exercice* 7 :**
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

***Exercice* 8 :**

(1) $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$:

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \\ \Leftrightarrow\ & x \subset A \vee x \subset B \\ \Rightarrow\ & x \subset A \cup B \vee x \subset A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & x \subset A \cup B \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$:

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ \Leftrightarrow\ & x \subset A \wedge x \subset B \\ \Leftrightarrow\ & x \subset A \cap B \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

***Exercice* 9 :** (Correction sommaire) Rappel : si un ensemble M est vide, toute propriété de la forme "$\forall x \in M$ quelque chose" est automatiquement vraie. Inversement toute propriété de la forme "$\exists x \in M$ quelque chose" est fausse.

On définit Q^P comme l'ensemble des applications de P dans Q, c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles F de $P \times Q$ qui vérifient l'unicité de l'image, ce qu'on exprime : $\forall p \in P, \exists! q \in Q, (p,q) \in F$. Donc si $P = \emptyset$, la propriété est automatiquement vraie (voir ci-dessus) donc le seul élément de $\emptyset \times Q$, qui est $\emptyset$, est valide, et $Q^\emptyset = \{\emptyset\}$. Par contre si $P \neq \emptyset$ et $Q = \emptyset$, la propriété est automatiquement fausse (voir ci-dessus) donc aucun élément n'est valide et $\emptyset^P = \emptyset$.

(Note : pour A, B finis on a $|B^A| = |B|^{|A|}$ donc on a en fait retrouvé $0^n = 0$ et $n^0 = 1$.)

***Exercice* 10 :** Un élément de $\mathcal{P}(A \times B)$ est un ensemble de couples, tandis qu'un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ est un couple. On ne peut donc pas avoir d'inclusion, dans aucune direction. (Les éléments n'ont pas le même "type").

***Exercice* 11 :** (Correction sommaire) Le raisonnement est essentiellement le même que dans l'exercice 9. Ce n'est pas un hasard puisque $\prod_{i \in I} a_i = \{(x_i) \in (\bigcup a_i)^I : x_i \in a_i\} \subset (\bigcup a_i)^I$.

***Exercice* 12 :** (Correction sommaire) On prend $p = \{x \in \mathcal{P}(\bigcup X) : \exists y \in X, x \subset y\}$. On a donc appliqué l'axiome de la réunion, puis des parties, puis le schéma de compréhension avec la formule $\exists y \in X, x \subset y$.

***Exercice* 13 :** $U = V = \mathbb{Z}$.
(Note : si $A_{i,j}$ était défini différemment, on n'aurait pas forcément $U = V$).

***Exercice* 14 :**

(a) Le produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ contient un seul élément : la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Le produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ contient exactement les suites (x_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $x_n \geq n$. Par exemple, $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n+1)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.