Université Paris 7 **16 septembre 2011**
Licence Math-Info (L3)
TD de Logique (Brice Minaud)

Correction du TD 0

***Exercice* 1 :**

(1) $\exists\, x\, \forall\, y\, \neg R(x,y)$
(2) $\forall\, x\, \exists\, y\, \exists\, z\, R(y,x) \wedge R(z,x) \wedge (y \neq z) \wedge \forall\, w (R(w,x) \implies (w = y \vee w = z))$
(3) $\forall\, x\, \forall\, y\, R(x,y) \implies \neg R(y,x)$
Ou de manière équivalente : $\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, (R(x,y) \wedge R(y,z)) \implies (x \neq z)$

Deuxième partie de l'exercice :

(1) Il existe une villageois qui n'a pas d'enfant.
(2) Personne n'est à la fois parent et grand-parent du même enfant.
Ou de manière équivalente : si deux personnes sont parents d'un même enfant, aucune des deux ne peut être enfant de l'autre.
(3) Il existe au moins deux familles distinctes dans le village.
Ou de manière équivalente : pour tout villageois il existe un autre villageois qui n'est pas dans sa famille.

***Exercice* 2 :**

(1) Tous les éléments sont égaux. C'est-à-dire qu'il existe en fait un seul élément, ou bien aucun élément. (ne pas oublier qu'une formule commençant par "pour tout x" portant sur un ensemble vide est automatiquement vraie quel que soit le reste de la formule)
(2) Pour tout élément il y en a un qui est différent. C'est-à dire qu'il existe ou bien au moins deux éléments, ou bien zéro élement. (même raison que ci-dessus pour la deuxième option)
(3) Pour n'importe quel couple d'éléments distincts, il existe un autre élément qui est compris strictement entre les deux (pour la relation $<$).
C'est vrai pour la relation d'ordre strict sur $\mathbb{R}$, mais faux sur $\mathbb{N}$ (il n'y a aucun élément strictement entre 0 et 1 par exemple).
(4) La fonction f est injective. C'est la définition de l'injectivité.
C'est vrai pour la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{R}$ (par exemple avec $v = -1$ et $w = 1$ on a $f(v) = (-1)^2 = 1$ et $f(w) = 1^2 = 1$ mais $v \neq w$).

***Exercice* 3 :**

(1) $\exists\, a \in M, \exists\, b \in M, \exists\, c \in M, \exists\, d \in M, \exists\, e \in M, (a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (a \neq d) \wedge (a \neq e) \wedge (b \neq c) \wedge (b \neq d) \wedge (b \neq e) \wedge (c \neq d) \wedge (c \neq e) \wedge (d \neq e)$
(2) $\exists\, a \in M, \exists\, b \in M, \exists\, c \in M, (a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c) \wedge \forall\, x \in M((x = a) \vee (x = b) \vee (x = c))$
(3) $\forall\, b \in B, \exists\, a \in A, f(a) = b$
(4) $(\forall\, x, xEx) \wedge (\forall\, x\, \forall\, y, xEy \implies yEx) \wedge (\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z, (xEy \wedge yEz) \implies xEz)$

***Exercice* 4 :**

(1) $\forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z, (x < y \wedge y < z) \implies x < z$
(2) La formule "il existe un plus petit élément" : $\exists\, x\, \forall\, y, \neg(y < x)$
est vraie dans $\mathbb{N}$ mais fausse dans $\mathbb{Z}$.
La formule "il existe deux éléments distincts sans rien entre eux" : $\exists\, x\, \exists\, y, (x < y) \wedge \neg\exists\, z((x < z) \wedge (z < y))$
est vraie dans $\mathbb{Z}$ (par exemple avec $x = 0$ et $y = 1$) mais fausse dans $\mathbb{R}$.
(3) $\exists\, c\, \forall\, x, f(x) = c$
(4) $\forall\, x, f(x) \neq x$

***Exercice* 5 :**

(1) En utilisant strictement les données de l'énoncé on peut écrire :
$\forall\, a \,\forall\, b \,\forall\, c \,\forall\, d, \neg(a = 0) \implies \exists\, x, a \times x \times x \times x + b \times x \times x + c \times x + d = 0$
en pratique on écrirait bien sûr cette formule en raccourci :
$\forall\, a \neq 0, b, c, d, \exists\, x, ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

(2) Encore une fois avec les notations de l'énoncé on écrit :
$\exists\, a, \exists\, b, \exists\, c, \neg(a = 0) \wedge \forall\, x\, \neg(a \times x \times x + b \times x + c = 0)$
ou bien en raccourci :
$\exists\, a \neq 0, b, c, \forall\, x, ax^2 + bx + c \neq 0$

(3) $\forall\, x, x \times x \neq -1$

(4) $\forall\, a, b, \exists\, c, a \times a + b \times b = c \times c$