

## Test 3

**Exercice 1.** Soit  $a > 1$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$ .

- a. Écrire le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (c'est-à-dire qu'il y a deux termes dans la formule, plus le reste) au point 1 de la fonction  $x \mapsto 1 + \ln x$ .
- b. En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $1 + \ln x \leq x$ .
- c. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- d. Montrer que  $(u_n)$  est minorée par 1 (on peut faire une récurrence).
- e. Montrer que  $(u_n)$  converge et trouver sa limite ( $x \mapsto 1 + \ln x$  est continue...).

**Exercice 2.**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$  pour  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

- a. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- b. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et calculer sa dérivée.
- c. Montrer que  $f$  est dérivable aussi en 0.

**Exercice 3.**

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x - x^5}{4^x - x^4} \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-n)^n}{n^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$$

**Exercice 4.** Soit :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

- a. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer pour tout  $x > 0$  :

$$\frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

- b. En déduire que pour  $x > 1$  :  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ .

- c. En déduire l'inégalité :  $1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

- d. Montrer que la suite  $(S_n)$  converge.

**Exercice 5.** (quand vous avez fini le reste)

Le père Noël aime boire son eau et son whisky purs. Il a un verre E de 20ml d'eau, et un verre W de 20ml de whisky sur sa table. Sans faire exprès un de ses cerfs renverse 5ml de son verre d'eau dans son verre de whisky, et les deux liquides se mélangent complètement. Pour que ça ne se voie pas trop, le cerf reverse 5ml du mélange whisky-eau dans le verre d'eau. Finalement, lequel des deux verres contient le liquide le plus pur ? Autrement dit, est-ce qu'il y a plus d'eau dans le whisky ou plus de whisky dans l'eau ? Ou bien est-ce égal ?