

Test 2-a

Exercice 1.

Combien y a-t-il d'injections d'un ensemble à 10 éléments dans un ensemble à 5 éléments ?

Exercice 2.

On considère le polynôme $P = X^5 + X^3 - X^2 - 1$.

- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. Il peut être utile de remarquer que i est racine.
- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

- Ecrire $(1 - i)^n$ sous forme polaire.
- Développer $(1 - i)^{4n}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On séparera la partie réelle et la partie imaginaire.
- En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{4n}^{2k} = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - C_{4n}^6 + \dots - C_{4n}^{4n-2} + C_{4n}^{4n}$$

Exercice 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?
- Calculer l'inverse de $M(-1)$.

Exercice 5.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer $A^3 - 2A$.
- En déduire une expression de l'inverse de A à l'aide de puissances de A (c'est-à-dire I, A, A^2, A^3 , etc...).
- En déduire l'inverse de A .

Test 2-b

Exercice 1.

Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble à 5 éléments dans un ensemble à 10 éléments ?

Exercice 2.

On considère le polynôme $P = X^5 + X^3 + X^2 + 1$.

- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. Il peut être utile de remarquer que i est racine.
- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

- Ecrire $(1 + i)^n$ sous forme polaire.
- Développer $(1 + i)^{4n}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. On séparera la partie réelle et la partie imaginaire.
- En déduire la valeur de la somme suivante :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k C_{4n}^{2k+1} = C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - C_{4n}^7 + C_{4n}^9 - \dots + C_{4n}^{4n-3} - C_{4n}^{4n-1}$$

Exercice 4.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?
- Calculer l'inverse de $M(-1)$.

Exercice 5.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer $A^3 - 2A$.
- En déduire une expression de l'inverse de A à l'aide de puissances de A (c'est-à-dire I, A, A^2, A^3 , etc...).
- En déduire l'inverse de A .