Feuille de TD n°9

Dérivation

Exercice 1
Soit f une fonction dérivable en 0. Montrer que $x \mapsto f(|x|)$ est dérivable en 0 si et seulement si $f'(0) = 0$.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b) La dérivée de f est-elle continue ?

Exercice 3
Calculer le développement de Taylor à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$.

Calculer le développement de Taylor à l'ordre 4 en 1 de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Exercice 4
On considère la fonction $h : x \mapsto \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$. Quel est son domaine de définition ? En simplifiant sa dérivée, donner une nouvelle expression de h. Puis donner l'allure du graphe de h.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est dérivable.

b) Montrer que f est deux fois dérivable.

c) Montrer que f est infiniment dérivable.
Indication : montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}(x)$ sécrit sous la forme $\frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, où P_n est un polynôme, et qu'elle reste dérivable en 0.

Exercice 6
On considère la fonction définie sur $[0, \pi^2]$ par $g(x) = 1 - \cos \sqrt{x}$.

a) Montrer que g est strictement croissante ; en déduire que c'est une bijection de $[0, \pi^2]$ dans un ensemble qu'on précisera.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g^{-1}, et calculer cette dérivée si elle existe.

Exercice 7
Soit $b > a$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Montrer que f est bornée.

Exercice 8
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles et simples. Montrer avec le théorème de Rolle que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Question de recherche : On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles.

Exercice 9

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et f et g des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in]a, b[$.

a) Montrer que l'on a $g(x) - g(a) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$.

b) On pose $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x) = f(x) - p\, g(x)$. Montrer que $u(a) = u(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

c) On suppose que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.

Exercice 10

a) Écrire la formule de Taylor au point 1 et à l'ordre 1 pour la fonction Arc tangente.

b) Montrer que pour tout nombre $x \geq 0$ on a

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq (\arctan x) - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2}(x-1).$$

Exercice 11

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\sqrt{1 - x} \leq 1 - \dfrac{x}{2}$.

c) En déduire l'inégalité $\cos x - \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

d) Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point 0 pour la fonction $\sqrt{1 - x}$.
En déduire que si $x \in [0, \pi/4]$, alors on a $1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8(1 - \pi/4)^{3/2}} \leq \sqrt{1 - x^2}$.

e) Trouver un nombre $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $0 \leq \cos x - \sqrt{1 - x^2} \leq M\, x^4$.

Exercice 12

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour $x \geq 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

b) En déduire que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n} - 1$.

c) En déduire que (u_n) diverge.

d) *Question de recherche :* adapter ce raisonnement pour montrer que $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.