Feuille de TD n° 8

Limite et continuité de fonctions numériques

Exercice 1.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, \infty[$, on a : $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leqslant \frac{1}{a^2}|x - y|$.
2) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| < \varepsilon.$$

3) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2.

1) Rappeler que pour tout nombre réels $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2n\pi} < \varepsilon$.
2) Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que :

$$|\sin\frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}.$$

3) En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 3. Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 4. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = xE(x)$.

Exercice 5. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin x$.

1) Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f n'est ni majorée ni minorée sur $[a, \infty[$.
2) La fonction f admet-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 6. Donner un exemple de fonction f définie sur $I = [0, 2]$ telle que :

1) $f(I)$ ne soit pas un intervalle.
2) $f(I)$ soit un intervalle fermé borné.
3) $f(I)$ soit un intervalle ouvert borné.
4) $f(I)$ soit un intervalle non borné.

Exercice 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue (I intervalle). Que pensez-vous des affirmations suivantes (on justifiera avec soin chaque réponse, soit en utilisant des résultats du cours soit en construisant des contre-exemples) :

1) l'image d'un intervalle est un intervalle ;
2) l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert ;
3) l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé ;
4) l'image d'un intervalle borné est un intervalle borné ;
5) l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exercice 8. *O*n rappelle les limites suivantes (à connaitre) :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \quad .$$

Lorsque les limites suivantes existent, les déterminer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{x^3+2}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}\cos\pi x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right)$ où $a,b>0$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{1+x^2}+x)$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\sqrt{(x^2+1)|\sin(x)|}}{x})$
18. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}2x\ln(x+\sqrt{x})$
19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
20. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
21. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}\ln\Big(\frac{x^3+4}{1-x^2}\Big)$
22. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8)$
23. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x\ln x-x\ln(x^2+2))$
24. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
25. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$
26. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x+1}{x-3}\Big)^x$
27. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^3+5}{x^2+2}\Big)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
28. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{e^x+1}{x+2}\Big)^{\frac{1}{x+1}}$

Exercice 9.

1) Soit $f\ :[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante et négative. Montrer que f a une limite finie l en $+\infty$ et que $l=\sup\{f(x)/x\geqslant 0\}$.
2) Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un fonction croissante, montrer qu'elle admet en tout point $x\in\mathbb{R}$ une limite à gauche et une limite à droite.
   Donner un exemple d'une telle fonction n'ayant pas de limite en 0.

Exercice 10. *M*ontrer qu'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite quand x tend vers $+\infty$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

1) Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe (i.e. il existe x tel que $f(x)=x$).
   Indication : on utilisera la fonction $g=f-Id$.
2) Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe : il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=x_0$.
3) Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée. En déduire qu'elle admet un point fixe.