Feuille de TD n° 6

Espaces vectoriels

Exercice 1. Exercice complémentaire sur les matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et on pose $B = A - I_3$.

1) Montrer que $B^3 = 0$.
2) Exprimer B^3 en fonction de A, A^2 et A^3.
3) En déduire que A est inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A puis de B et calculer A^{-1}.
4) Calculer B^n pour tout $n \geq 4$.
5) Exprimer A^4 en fonction de B et B^2 puis la calculer.
6) Exprimer A^n pour tout $n \geq 4$ en fonction de B et B^2 puis calculer ses coefficients en fonction de n.

Exercice 2.
Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels connus que l'on précisera.

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = x + y + z = 0\}$.
- $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x^2 - z^2 = 0\}$.
- $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x e^y = 0\}$.
- $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z(x^2 + y^2) = 0\}$.
- $E_5 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ (ces matrices sont appelées symétriques).
- $E_6 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} /\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$.

Exercice 3.
Déterminer si les familles suivantes sont linéairement indépendantes de la manière la plus simple possible :

1) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 2)$, $v_3 = (1, -2, 1)$ et $v_4 = (-1, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
4) $v_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $v_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5) Dans l'espace des suites réelles, (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ où $r \in \mathbb{R}^*$.
6) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3.

Exercice 4.
Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1) v_1 et v_2 sont-ils colinéaires ? De même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.
2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle linéairement indépendante ?

Exercice 5.
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : (e_1, e_2, e_3, e_4).
Les familles suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?
1) $(e_1, 2e_2, e_3)$, 2) (e_1, e_3), 3) $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$, 4) $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

Exercice 6.
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère :
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$?
Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Exercice 7.
Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.
1) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$
2) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 8, 13)$
3) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 10, -11)$

Exercice 8.
Comparer les sous-espaces F et G suivants :
1) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \langle(2, 3, -1), (1, -1, -2)\rangle$ et $G = \langle(3, 7, 0), (5, 0, -7)\rangle$
2) Dans $\mathbb{R}^4$, $F = \langle(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\rangle$ et $G = \langle(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\rangle$

Exercice 9.
Donner la dimension et une équation des sous-espaces dont une représentation paramétrique est :

1) $\begin{cases} x = 3s - t \\ y = -s - t \\ z = s - t \end{cases}$ (avec s et t dans $\mathbb{R}$) ; 2) $\begin{cases} x = s - t \\ y = -s - t \\ z = 2s - t \end{cases}$ (avec s et t dans $\mathbb{R}$).

Exercice 10.
Soient les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ de $\mathbb{R}^4$.
1) Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \langle e_1, e_2\rangle$?
2) Idem pour que $(x, 1, 1, y) \in \langle e_1, e_2\rangle$?

Exercice 11.
Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille linéairement indépendante engendrant le même sous-espace.

Exercice 12.
Déterminer le rang des familles suivantes :

1) $(1,0,1)$, $(0,2,2)$, $(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4) $(2,4,3,-1,-2,1)$, $(1,1,2,1,3,1)$, $(0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5) $(2,1,3,-1,4,-1)$, $(-1,1,-2,2,-3,3)$, $(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Indication : on commencera par extraire de la famille une base de l'espace qu'elle engendre.

Exercice 13.
Déterminer selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$, le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (1,0,t)$, $u_2 = (1,1,t)$ et $u_3 = (t,0,1)$.

Exercice 14.
Déterminer pour quels réels a, b et c, les vecteurs $(1,a,a^2)$, $(1,b,b^2)$ et $(1,c,c^2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.
Déterminer une base des sous-espaces définis par les équations suivantes :

1) Dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, $2x-3y+z=0$

3) Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

4) Dans $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

5) Dans $\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x+y+5t=0 \\ x+2y-z+7t=0 \\ -x+3y-4z+3t=0 \end{cases}$

Exercice 16.
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e1, e2, e3, e4)$ et la base
$\mathcal{B} = (e1,\ e1+e2,\ e1+e2+e3,\ e1+e2+e3+e4)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.
2) Soit $v = (1,-1,3,-2)$. Calculer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, sont : $-2, 0, 4, 1$.

Exercice 17.
On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $a = (1, 2, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer les coordonnées des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_0$ dans $\mathcal{B}$.
4) Ecrire les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$ puis vérifier quelles sont l'inverse l'une de l'autre.
5) Utiliser ces matrices de passage pour calculer les coordonnées du vecteur $b = (-1, 2, 0)$ dans la base $\mathcal{B}$ puis pour calculer le vecteur c de coordonnées $(1, 0, -2)$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 18.
Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + z,\ -2x + y + z,\ -6x + 2y + 4z) \end{array}$$

1) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) f est-elle injective, surjective (répondre avec un minimum de calcul) ?
3) Soient $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 19.
Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & (x + y + 5t,\ x + 2y - z + 7t,\ -x + 3y - 4z + 3t) \end{array}$$

1) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base du noyau de f.
3) Calculer le rang de f.
4) Donner une base de son image.

Exercice 20.
Mêmes questions pour l'application linéaire suivante et les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + 3y,\ 2x + 2y,\ 3x + y) \end{array}$$

Exercice 21.
Mêmes questions pour l'application linéaire suivante et la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z,\ -x + 4y - 3z,\ 4x + 5y - 3z) \end{array}$$