Feuille de TD n°5

Calcul matriciel

Exercice 1 Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ? Pour celles qui sont inversibles, calculer l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 9 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soient deux matrices carrées A et B qui commutent c'est-à-dire telles que $AB = BA$. Montrer que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (1)$$
$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \quad (2)$$
$$(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + C_n^2 A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n \quad (3)$$

Montrer que les deux premières propriétés sont fausses chaque fois que $AB \neq BA$.

Exercice 4 Soient $A,B \in M_n(\mathbb{C})$.
1) Montrer que si $AB = A$ et $BA = B$ alors $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
2) Si B est inversible, à quelle condition A divise-t-il B à gauche (au sens : $\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), B = AM$) ?
3) Si $AB = 0$, a-t-on $A = 0$ ou $B = 0$?
4) Si $AB = 0$, a-t-on $BA = 0$?

Exercice 5 Trouver toutes les matrices X qui commutent avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Refaire la première question de l'exercice 5 de la feuille précédente en utilisant le déterminant. La question était : trouver les valeurs de m pour lesquelles le système ci-dessous admet des solutions non nulles. On ne demande pas de calculer les solutions.

$$\begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Donner le rang des matrices suivantes en fonction de a (utiliser le déterminant).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Inverser les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 2 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(i) En posant un vecteur $\overline{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, calculer $R(\theta)\overline{u}$. Calculer d'autre part $e^{i\theta}(a+ib)$ sous forme $x+iy$. En comparant les résultats des deux calculs précédents, donner un sens géométrique à $R(\theta)$.

(ii) Calculer $\det(R(\theta))$, $(R(\theta))^{-1}$, et montrer $(R(\theta))^n = R(n\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Soient a et b des nombres réels. On suppose $b \neq 0$ et l'on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe un unique nombre $\lambda > 0$ et un unique nombre $\theta \in]0, 2\pi[$ tels que $A = \lambda R(\theta)$.

(iv) Calculer $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercices de recherche.

Exercice 10

(i) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^k pour $k = 0, 1, 2, 3, ...$

(ii) Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer P^k pour $k = 0, 1, 2, 3, ...$

(iii) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer Q^k pour $k = 0, 1, 2, 3, ...$

(iv) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q - I_3$. Montrer que $A^k = (-1)^k I_3 + \dfrac{2^k + (-1)^{k+1}}{3} Q$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(v) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^p, pour tout entier p. Montrer que A est inversible et trouver A^{-1}.

(vi) Soit la matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par : $a_{i,j} = \begin{cases} C_{i-1}^{j-1} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que A est inversible et trouver son inverse.

Exercice 11 Soit $D \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que : $(\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ DA = AD) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ D = \lambda I_2$. Est-ce encore vrai pour des matrices de format $n \times n$, avec $n > 2$?