Feuille de TD n°3

Polynômes

Exercice 1
Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :
(i) $A = X^3 - 1, \quad B = X + 2$;
(ii) $A = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1, \quad B = X^2 + iX + 1$.

Exercice 2
Factoriser $A = X^5 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$.
(Il y a deux manières de faire.)

Exercice 3
Factoriser $A = X^4 - 2X^3 - X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux manières :
(i) en remarquant que 2 est racine, puis en factorisant d'abord dans $\mathbb{C}[X]$;
(ii) sans passer par $\mathbb{C}$.

Exercice 4
Résoudre l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$:
(i) en posant $u = z^2$;
(ii) en décomposant le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ en produit de polynômes de degré 2 à coefficients réels ;
(*petite aide :* tous les coefficients dans la décomposition sont entiers)
(iii) en calculant $(X^4 + X^2 + 1)(X^2 - 1)$.
Question de recherche : comment a-t-on pu avoir l'idée de multiplier par $X^2 - 1$?

Exercice 5
Les polynômes $A = X^5 + X^4 + X - 2$ et $B = X^3 - X + 1$ ont-ils une racine commune ?

Exercice 6
Soit n un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n.$$

Exercice 7
Trouver tous les polynômes de degré ≤ 3 tels que

$$P(0) = 1, \; P(1) = 2, \; P(2) = -1, \; P(3) = -2.$$

Exercice 8
Soit $P(X) = X^2 + aX + b$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 et unitaire. Si α et β sont les racines de P, montrer que l'on a $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$.

Exercice 9
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que P est divisible par $(X - a)^2$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

Exercice 10

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit le polynôme $P(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} ... + \dfrac{X^n}{n!}$.
(i) Calculer $P(X) - P'(X)$.
(ii) Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 11

Soit P un polynôme à coefficients réels. En notant R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.
Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division enclidienne.

Exercice 12

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que

$$P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1.$$

Exercice 13

Soit P un polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que a est racine de P de multiplicité exactement m. Montrer que a est racine de P' de multiplicité exactement $m - 1$.

Exercice 14

Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de :

$$A(X) = (\cos a + X \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

Exercices de recherche

Exercice 15

Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 16

Soit A un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Soient A et B deux polynômes unitaires divisant A de degré maximal. Montrer $A = B$.

Exercice 17

Il a été mentionné en cours que l'arithmétique fonctionne dans $\mathbb{K}[X]$ exactement comme dans $\mathbb{Z}$. Ainsi : Montrer le théorème de Gauss : si $PGCD(A, B) = 1$, A divise C, B divise C, alors $A * B$ divise C. (Le $PGCD$ est défini comme dans l'exercice 16.)

Exercice 18

Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet une racine réelle :
(i) en passant par $\mathbb{C}[X]$;
(ii) sans passer par $\mathbb{C}$.
Est-ce que tout polynôme de degré 4 et plus admet une racine réelle ?

Exercice 19

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré non nul. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Pour celles qui sont vraies, justifier ; pour celles qui sont fausses, donner un contre-exemple.
1) Si P est de degré impair, alors P admet une racine réelle.
2) Si P admet une racine réelle, alors P' admet une racine réelle.
3) Si P admet deux racines rélles, alors P' admet une racine réelle.
4) Si toutes les racines de P' sont simples, alors toutes les racines de P sont simples.
5) Si toutes les racines de P sont simples, alors toutes les racines de P' sont simples.