Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence Physique, Dominante Physique, L1

Cours de Mathématiques
Année 2008-2009, 1^{er} semestre

Feuille de TD n°10

Développements limités

Exercice 1 Calculer les développements limités suivants :

a) $f(x) = \exp x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
b) $f(x) = \cosh x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
c) $f(x) = \sinh x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
d) $f(x) = \arctan x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
e) $f(x) = \arcsin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
f) $f(x) = \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4
h) $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5
i) $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
j) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 5
k) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3
l) $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3
m) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3
n) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3
o) En déduire le développement limité, au voisinage de 0 et à l'ordre 4 de $g(x) = (\arcsin x)^2$

Exercice 2 En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argsh} x - \operatorname{argch} x}{\left(\operatorname{argth} \frac{1}{x}\right)^2}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x^{\frac{1}{x}}}{(x-1)^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sin(x)}-1}{x}$

Exercice 3

a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} < 0$.
b) Montrer que la fonction $x \mapsto x\log(x+1) - (x+1)\log x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
c) Calculer la limite de $x\log(1+1/x)$ quand x tend vers $+\infty$.
d) En déduire qu'il existe un unique nombre réel $a > 0$ tel que $(a+1)^a = a^{a+1}$.

Exercice 4 Exercice de recherche

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et y admettant un développement limité, montrer que f est dérivable en 0.

b) Réciproquement, si f, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, est dérivable en 0, montrer qu'elle y admet un développement limité à l'ordre 1.

c) Soit f la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 mais n'y admet pas de dérivé seconde.

Exercice 5 Calculer les expressions suivantes

a) $\sin(\arcsin x)$, $\cos(\arccos x)$ et $\tan(\arctan x)$

b) $\tan(\arcsin x)$ et $\tan(\arccos x)$

c) $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$ et $\arctan(\tan x)$

d) $\arcsin x - \arccos x$

e) $\arcsin(\sin 2x)$

f) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes

a) $\arcsin x = 2 \arctan x$

b) $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$

c) $\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \arctan x$

d) $\operatorname{argsh} x = \operatorname{argsh}(2 - x)$