Feuille de TD n° 1

Ensembles et applications

Exercice 1. On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0,1] \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{1+n} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{1+n} \right\}$$

a. L'ensemble E a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?

b. L'ensemble F a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?

c. Ecrire les définitions des complémentaires dans $\mathbb{R}$ des ensembles E et F.

Exercice 2. Soit E un ensemble et A, B des parties de E.

a. Simplifier chacune des deux expressions suivantes : $A \cup (A \cap B)$, $A \cup (A \cup B)$.

b. Trouver un ensemble E et trois parties A, B, C de E tels que : $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3. On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$: $I = [1,3]$ et $J = [2,4]$.

Trouver un élément de $(I \cup J) \times (I \cup J)$ qui n'appartient pas à $(I \times I) \cup (J \times J)$.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin x$. Comparer les ensembles :

a. $[0, \frac{\pi}{3}]$ et $f^{-1}\left(f([0, \frac{\pi}{3}])\right)$;

b. $[0,2]$ et $f\left(f^{-1}([0,2])\right)$;

Essayer d'écrire et de démontrer les résultats généraux correspondant.

Exercice 5. Soit $f : E \to F$ une application.

a. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Donner un exemple pour lequel cette inclusion est stricte.

b. Imaginer ou rechercher en bibliothèque ou sur internet des propriétés similaires pour les images réciproques des parties de F.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x - y^2$.

a. L'application f est-elle injective ?

b. Montrer que l'application f est surjective.

Exercice 7. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+y, x-y)$ est bijective.

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une application. On suppose que f est injective. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 9. Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.

a. Montrer que si les applications f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

b. Montrer que si les applications f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective.

c. Montrer que si l'application $g \circ f$ est injective, alors l'application f est injective.

d. Montrer que si l'application $g \circ f$ est surjective, alors l'application g est surjective.

Exercice 10. Montrer les propriétés suivantes :

a. Pour tout entier positif n, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

b. Pour tout entier positif n, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. Pour tout réel $x \neq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Exercices de recherche

Exercice 11. ***Formule du binôme de Newton***

a. Démontrer que pour tout entier naturel n et tout couple (x, y) de réels (ou de nombres complexes) :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$

Exercice 12. Soit E un ensemble. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 13.

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Notons F l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

a. Quel est le cardinal de F ?

b. Pour toute partie A de E, notons C_A la fonction de E dans $\{0, 1\}$ définie par $C_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $C_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans F qui à toute partie A de E associe C_A. Montrer que φ est une application injective. En déduire que l'application φ est bijective.