Feuille de TD n°2 - Correction

Nombres Complexes

Exercice 7

(a) Pour tout n entier naturel et θ réel, on a :

$$C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \big(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)\big) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

– **Premier cas** : θ n'est pas congru à 0 modulo 2π. Alors $e^{ik\theta} \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$. On peut simplifier cette expression de la manière suivante ou comme on le fera dans la question (ii) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \; \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n}{2}\theta} \; \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires et en utilisant les formules de linéarisation de $\cos a \cos b$ et $\cos a \sin b$, on obtient finalement :

$$C_n(\theta) = \cos(\frac{n}{2}\theta) \; \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)}{2\sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{2}$$

$$S_n(\theta) = \sin(\frac{n}{2}\theta) \; \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos\big((n+\frac{1}{2})\theta\big)}{2\sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{1}{2}\cot(\frac{\theta}{2})$$

– **Deuxième cas** : $\theta \equiv 0[2\pi]$. Pour tout n entier naturel, on a $C_n(0) = n+1$ et $S_n(0) = 0$.

(b) Comme en (i), on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} a^k \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} a^k \; e^{ik\theta}$$

– **Premier cas** : $a \neq 1$ et θ n'est pas congru à 0 modulo 2π. Alors $ae^{ik\theta} \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k \; e^{ik\theta} = \frac{1-a^{n+1} \; e^{i(n+1)\theta}}{1-a \; e^{i\theta}}$.

On peut simplifier cette expression en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k \; e^{ik\theta} &= \frac{\big(1-a^{n+1} \; e^{i(n+1)\theta}\big)\big(1-a \; e^{-i\theta}\big)}{\big(1-a \; e^{i\theta}\big)\big(1-a \; e^{-i\theta}\big)} \\ &= \frac{1-a \; e^{-i\theta} - a^{n+1} \; e^{i(n+1)\theta} + a^{n+2} \; e^{in\theta}}{1-2a\cos(\theta)+a^2}\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta) = \frac{1-a \; \cos\theta - a^{n+1} \; \cos\big((n+1)\theta\big) + a^{n+2} \; \cos(n\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \sin(k\theta) = \frac{1+a \; \sin\theta - a^{n+1} \; \sin\big((n+1)\theta\big) + a^{n+2} \; \sin(n\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$$

– **Deuxième cas** : $a = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$. Pour tout n entier naturel, on a alors $\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta) = n+1$ et $\sum_{k=0}^{n} a^k \sin(k\theta) = 0$.

Exercice 9
(b) : ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = BC = CA \Leftrightarrow |z-i| = |iz-z| = |i-iz| \Leftrightarrow \begin{cases} |z-i| = |iz-z| (1) \\ |z-i| = |i-iz| (2) \end{cases}$

L'équation (2) $|z-i| = |i-iz|$ équivaut à $|z-i| = |z-1|$, donc z vérifie l'équation (2) si et seulement si le point $B(z)$ appartient à la médiatrice $\mathcal{D}$ du segment $[E(1), F(i)]$, que l'on appelle aussi première bissectrice.

Par ailleurs, $|iz-z|^2 = |i-1|^2|z|^2 = 2z\bar{z}$ et $|z-i|^2 = (z-i)\overline{(z-i)} = (z-i)(\bar{z}+i) = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1$, donc on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (1) \quad |z-i| = |iz-z| \quad & \Leftrightarrow \quad |z-i|^2 = |iz-z|^2 \\ & \Leftrightarrow \quad z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (z+i)(\bar{z}-i) + i^2 - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad |z+i|^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow \quad |z+i| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc z vérifie l'équation (1) si et seulement si le point $B(z)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre G d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
ABC est donc équilatéral si et seulement si $B(z)$ est à l'intersection de la première bissectrice $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ de centre G d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
$\mathcal{C}$ passe par $H(-1)$ car $GH = \sqrt{2}$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice du rayon $[G, H]$. L'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ contient deux points distincts I et J.
On note K l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite (GH).
$\widehat{KGI}$ et $\widehat{KGJ}$ ont pour mesure $\pi/3$ et $-\pi/3$ ou vice-versa car leur cosinus vaut $\frac{GK}{GI} = \frac{GK}{GJ} = 1/2$. On en déduit que $KI = KJ = GJ|\sin(\pi/3)| = \sqrt{6}/2$.
Donc les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont pour affixes $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

Conclusion
ABC est équilatéral si et seulement si $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exercice 10 : Correction sommaire
(i) On obtient une spirale.
(ii) On a $1 + i = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc pour tout n entier, $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\ e^{i\frac{\pi}{4}n}$. La courbe paramétrée $t \to (\sqrt{2})^t\ e^{i\frac{\pi}{4}t}$ répond à la question.

Exercice 11 : Correction sommaire

– **Premier cas** : $n = 0$. On a $A_0(\theta) = C_0^0 = 1$ et $B_0(\theta) = 0$
– **Deuxième cas** : $n > 0$. On a $A_n(\theta) + iB_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ e^{ik\theta}$
  D'après la formule du binôme de Newton, on en déduit :

$$A_n(\theta) + iB_n(\theta) = (1 + e^{i\theta})^n = e^{i\frac{n\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})^n = 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2})\ e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

  En identifiant les parties réelles et imaginaires, il en découle :

$$A_n(\theta) = 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2})\ \cos(\frac{n\theta}{2}) \quad \text{et} \quad B_n(\theta) = 2^n \cos^n(\frac{\theta}{2})\ \sin(\frac{n\theta}{2})$$

On constate que ces formules sont encore vraies pour $n = 0$.

Les deux dernières formules s'en déduisent car la première somme est $A_n(0)$ et la deuxième $A_n(\pi)$

Exercice 12

(i) A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{R},\ c - a = k(b-a)\ \Leftrightarrow\ b = a$ OU $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

(ii) Cas $n = 2$. D'après (i), on a :

Les points d'affixes 1, z et z^2 sont alignés $\Leftrightarrow\ z = 1$ OU $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

Or si $z \neq 1$, $\dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$, donc $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ z+1 \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$.

Finalement, les points d'affixes 1, z et z^2 sont alignés si et seulement z est réel.

(iii) Cas $n = 3$. D'après (i), on a :

Les points d'affixes 1, z et z^3 sont alignés $\Leftrightarrow\ z = 1$ OU $\dfrac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

Or si $z \neq 1$, $\dfrac{z^3-1}{z-1} = 1 + z + z^2$ puisqu'on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison z.

De plus la condition $z = 1$ est un cas particulier de la condition $1 + z + z^2 \in \mathbb{R}$ donc
$z = 1$ OU $\dfrac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow\ 1 + z + z^2 \in \mathbb{R}$.

Finalement, les points d'affixes 1, z et z^3 sont alignés si et seulement si $1 + z + z^2 \in \mathbb{R}$.

(iv) En posant $z = x + iy$ avec x et y réels, on a $1 + z + z^2 = 1 + x + iy + x^2 - y^2 + i2xy$ donc $1 + z + z^2 \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ y + 2xy = 0\ \Leftrightarrow\ y = 0$ OU $x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow\ \big(z \in \mathbb{R}\big)$ OU $\big(\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $z = -\dfrac{1}{2} + iy\big)$.