Feuille de TD n° 1 : Correction

Ensembles et applications

Exercice 5

a. **(i) Démonstration de** $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$**.**

On montre d'abord que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
Soit y un élément de $f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$.
$(x \in A)$ OU $(x \in B)$ donc $(f(x) \in f(A))$ OU $(f(x) \in f(B))$.
On en conclut que $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Puis on montre que $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.
Soit y un élément de $f(A) \cup f(B)$.
$(y \in f(A))$ OU $(y \in f(B))$ donc $(\exists x \in A, f(x) = y)$ OU $(\exists x \in B, f(x) = y)$
qui équivaut à $(\exists x \in A \cup B)$ tel que $f(x) = y$
c'est-à-dire $y \in f(A \cup B)$.

(ii) Démonstration de $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$**.**

Soit y un élément de $f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$.
$x \in A$ donc $f(x) \in f(A)$ et $x \in B$ donc $f(x) \in f(B)$.
On en conclut que $y \in f(A) \cap f(B)$.

Exemple pour lequel cette inclusion est stricte.
On choisit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in R$ par $f(x) = x^2$, puis
$A = [-2, -1]$ et $B = [1, 2]$.
$A \cap B = \emptyset$ donc $f(A \cap B) = \emptyset$.
$f(A) = f(B) = [1, 4]$ donc $f(A) \cap f(B) = [1, 4]$.

b. **Relations sur les images réciproques**

Pour toute application $f : E \to F$ et pour toutes parties A' et B' de F : $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Exercice 8

D'après l'exercice 5, on sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

On montre que $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$.
Soit y un élément de $f(A) \cap f(B)$. Il existe $x \in A$ et $x' \in B$ tel que $f(x) = y$ et $f(x') = y$. $f(x) = f(x')$ et f est injective donc $x = x'$, on en déduit que $x \in B$ donc $x \in A \cap B$ ce qui implique $y \in f(A \cap B)$.

Exercice 9

a. Soient x et x' des éléments quelconques de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. De plus f est injective donc $x = x'$. On en conclut que $g \circ f$ **est injective**.

b. Soit z un élément quelconque de G, g est surjective donc il existe y dans F tel que $g(y) = z$. Comme f est aussi surjective, il existe x dans E tel que $f(x) = y$. On a trouvé $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$, $g \circ f$ **est donc surjective**.

c. Soient x et x' des éléments quelconques de E tels que $f(x) = f(x')$. On en déduit que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme $g \circ f$ est injective, il découle que $x = x'$. Par conséquent, f **est injective**.

d. Soit z un élément quelconque de G, $g \circ f$ est surjective donc il existe x dans E tel que $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$. En posant $y = f(x)$, on a trouvé $y \in F$ tel que $g(y) = z$, g **est donc surjective**.