Feuille de TD n°9 - Correction

Dérivation

Exercice 5

Avant de commencer les questions, une remarque importante est que f est composée de fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}^*$, donc f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Le seul problème à chaque fois est donc en 0.

a) Il suffit de vérifier que f est dérivable en 0. Le plus rapide est de calculer directement :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} ye^{-y^2} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

en effet, y est négligeable devant e^y en $+\infty$, a fortiori devant e^{y^2} qui est plus grand que e^y. Remarque : dans le calcul on a posé $y = 1/x$.

Ainsi on trouve que la limite existe et vaut 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

b) Pour vérifier que f'' existe, on calcule d'abord f' :

$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^*$, et $f'(0) = 0$ d'après *a)*.

Vérifions donc que f' est dérivable en 0. On calcule :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y^4}{2e^{y^2}} = 0$$

Ainsi f' est dérivable en 0 et $f''(0) = 0$. Avec la remarque préliminaire, il suit que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ entier.

c) Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété $Prop(n)$:

"*f est dérivable n fois, avec $f^{(n)} = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f^{(n)}(0) = 0$, pour un certain polynôme P_n.*"

L'énoncé de l'exercice donne $Prop(0)$. Dans les questions *a)* et *b)* on a vérifié $Prop(1)$ et $Prop(2)$, respectivement. Il reste donc à montrer que si $Prop(n)$ est vraie, $Prop(n+1)$ aussi.

Soit $n \geq 0$ quelconque. On suppose $Prop(n)$ vraie ; montrons $Prop(n+1)$. Le premier point à vérifier est donc que f est dérivable $n+1$ fois. Comme d'habitude il suffit de vérifier en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to +\infty} P_n(\frac{1}{y})\frac{y^{3n+1}}{2e^{y^2}} = 0$$

En effet, tous les termes de $P_n(y)$ et y^{3n+1} sont finalement des y^α qui sont négligeables devant e^y. Remarque : comme précédemment on a posé $y = 1/x$.

Ainsi $f^{(n+1)}$ existe, et on a aussi trouvé $f^{(n+1)}(0) = 0$. La seule affirmation de $Prop(n+1)$ qu'il reste à montrer porte sur l'expression de $f^{(n+1)}$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculons donc $f^{(n+1)}$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = (\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}})' \\
&= (\frac{P_n(x)}{x^{3n}})'e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \cdot \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= (\frac{P_n'(x)x^{3n} - 2nP_n(x)x^{3n-1}}{x^{6n}} + \frac{2P_n(x)}{x^{3(n+1)}})e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{1}{x^{3(n+1)}}\big(P_n'(x)x^3 - 2nP_n(x)x^2 + 2P_n(x)\big)e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

En posant $P_{n+1} = X^3P_n' + (-2nX^2+2)P_n$ on a donc montré $Prop(n+1)$.

En conclusion, $Prop(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, donc en particulier f est infiniment dérivable.

Exercice 7

La dérivée de f est bornée donc il existe M tel que pour tout $y \in]a,b[$, $|f'(y)| \leq M$.

On pose $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ ($x_0 \in]a,b[$).

Soit x quelconque dans $]a,b[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[x, x_0]$ ou $[x_0, x]$ selon leur ordre et on en déduit qu'il existe c_x compris entre x et x_0 tel que $|f(x) - f(x_0)| = |f'(c_x)||x - x_0|$.

$c_x \in]a,b[$ donc $|f'(c_x)| \leq M$.

De plus $|x - x_0| < b - a$ donc $|f(x) - f(x_0)| < M(b-a)$ c'est-à-dire
$f(x_0) - M(b-a) < f(x) < f(x_0) + M(b-a)$.

Conclusion : $f(x)$ est encadrée par deux réels indépendants de x donc f est bornée.

Exercice 9

a) Soit $x \in]a,b]$ quelconque. On remarque que $a < x$.
La fonction g est continue sur $[a,x] \subset [a,b]$ et dérivable sur $]a,x[\subset]a,b[$, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à g sur $[a,x]$. Il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(c_x)$.
Or $g'(c_x) \neq 0$ puisque, par hypothèse, $g'(y) \neq 0$ quelque soit $y \in]a,b[$. Comme on a aussi $x - a \neq 0$, on en déduit que $g(x) - g(a) \neq 0$.

b) On remarque tout d'abord que p est bien défini d'après la question a).

$$u(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(a) = \frac{\big(g(b)-g(a)\big)f(a) - \big(f(b)-f(a)\big)g(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{g(b)f(a) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$u(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(b) = \frac{\big(g(b)-g(a)\big)f(b) - \big(f(b)-f(a)\big)g(b)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - g(a)f(b)}{g(b)-g(a)}$$

On en conclut que $u(a) = u(b)$

Comme u est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, par application du théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $u'(c) = 0$.

Or $u'(c) = f'(c) - p\, g'(c)$ et $g'(c) \neq 0$ donc $u'(c) = 0$ implique $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = p = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

c) Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ implique qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \neq a$ appartenant à $[a,b]$,

$|x - a| < \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$.

Soit x quelconque dans $]a,b]$ vérifiant $|x - a| < \alpha$.

f et g sont dérivables sur $[a,x]$ et g' ne s'annule pas sur $[a,x]$ donc on peut appliquer le résultat de la question b) à l'intervalle $[a,x]$: il existe $c_x \in]a,x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.

Comme $|c_x - a| < |x - a| < \alpha$, on a $\left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right| < \varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| < \varepsilon$

On a montré que pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \neq a$ appartenant à $[a,b]$, $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| < \varepsilon$.

On a donc démontré $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

Exercice 11

a) Montrons d'abord la partie gauche de l'inégalité. On sépare trois cas.

1) Pour $x \in [0, \pi]$: la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à la fonction cos au point 0 donne :
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \sin(c)\frac{x^4}{24}$$
Pour $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc pour $x \in [0, \pi]$ on a bien $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

2) Pour $x \in [0, +\infty[$: la fonction $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ est décroissante sur $[\pi, +\infty[$, et $1 - \frac{\pi^2}{2} < -1$ donc pour $x \in [\pi, +\infty[$, $1 - \frac{x^2}{2} < -1 \leq \cos(x)$.

3) Pour $x < 0$: on a montré avec les cas précédents que $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, donc pour $x < 0$, $\cos(-x) \geq 1 - \frac{(-x)^2}{2}$, donc $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.
Reste la partie droite de l'égalité. On sépare quatre cas.

1) Pour $x \in [0, \pi]$: La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 appliquée à la fonction cos au point 0 donne :
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \sin(c)\frac{x^6}{720}$$
Sur $[0, \pi]$ la fonction sin est positive donc on a bien $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2) Pour $x \in [\pi, 2\pi]$: une étude de fonction rapide montre que $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ est (strictement) positive sur cet interavalle, or cos est négative, donc on a toujours $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

3) Pour $x \in [2\pi, +\infty[$: la fonction $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ est supérieure à 1 sur cet intervalle, donc $\cos(x) \leq 1 \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

4) Pour $x < 0$: on a montré avec les cas précédents que $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ sur $\mathbb{R}_+$, donc pour $x < 0$, $\cos(-x) \leq 1 - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^4}{24}$, donc $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

En conclusion on a sur tout $\mathbb{R}$:
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

b) La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ au point 0 donne :
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8(1-c)^{3/2}}$$
Pour $x \in [0, 1]$, comme $c \in [0, x[$, $0 \leq c \leq 1$ donc $\frac{x^2}{8(1-c)^{3/2}} \geq 0$ et on trouve bien l'inégalité cherchée.

c) D'après les encadrements trouvés en *a)* et *b)*, on a pour $x \in [0, 1]$:
$$\cos(x) - \sqrt{1-x} \geq 1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}x(1-x) \geq 0$$

d) Soit $X \in [0, \pi/4]$ quelconque. On remarque que $\pi/4 < 1$ donc $[0, \pi/4] \subset]-\infty, 1[$
La fonction $x \to \sqrt{1-x}$ est C^∞ sur $]-\infty, 1[$ donc on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 1 au point 0 pour $\sqrt{1-X}$:
il existe θ_X compris entre 0 et X tel que $\sqrt{1-X} = 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}(1-\theta_X)^{-\frac{3}{2}}\ \frac{X^2}{2}$. (III)
$X \in [0, \pi/4]$ implique $\theta_X \in [0, \pi/4]$ donc $1 - \frac{\pi}{4} \leq 1 - \theta_X \leq 1$. Comme la fonction $x \to x^{-3/2}$ est décroissante, on en déduit $(1 - \frac{\pi}{4})^{-3/2} \geq (1-\theta_X)^{-3/2}$.

La formule (III) permet donc d'écrire
$\sqrt{1-X} \geq 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{-3/2}\frac{X^2}{2} = 1 - \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}}$.

Conclusion : pour tout $X \in [0, \pi/4]$, on a $1 - \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}} \leq \sqrt{1-X}$

Soit $x \in [0, \pi/4]$ quelconque. On pose $X = x^2$, comme $x \leq \pi/4 < 1$ on a $X \leq \pi/4$. On peut donc appliquer le résultat précédent.

Conclusion : pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}} \leq \sqrt{1-x^2}$.

e) Soit $x \in [0, \pi/4]$ quelconque. On déduit des questions a) et d) que
$\cos x - \sqrt{1-x^2} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}} = \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}}\right)x^4$.

On pose $M = \frac{1}{24} + \frac{1}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}}$. On a $M > 0$ et l'inégalité précédente s'écrit

$\cos x - \sqrt{1-x^2} \leq M\ x^4$.

D'après la question c), on a aussi $\cos x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$. D'où le résultat demandé.

Exercice 12

a) Fait en TD.

b) On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} (2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}) \qquad \text{avec la question a)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2\sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} 2\sqrt{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2\sqrt{k} \\
&= 2\sqrt{n} - 2\sqrt{0} \\
&= 2\sqrt{n}
\end{aligned}$$

On a bien la résultat de l'énoncé (sans le -1 qui n'est pas faux mais inutile).

c) La suite (u_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$ donc elle tend aussi vers $+\infty$.

d) Le raisonnement est exactement le même en partant de la formule :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

obtenue avec les accroissements finis appliqués à la fonction ln entre n et $n+1$.