Feuille de TD n° 8

Limite et continuité : Correction

Exercice 2

Il est préférable de **remplacer dans l'énoncé** ε par α pour plus de cohérence avec les notations du cours.

1) Soit $\alpha > 0$, il existe un entier supérieur au réel $\dfrac{1}{2\alpha\pi}$ (on dit que $\mathbb{N}$ est archimédien).
Or $n > \dfrac{1}{2\alpha\pi}$ implique $\dfrac{1}{2n\pi} < \alpha$.

2) On remarque d'abord que si $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\sin(\frac{1}{x}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$.
De même si $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\sin(\frac{1}{x}) = \sin(2n\pi + \frac{3\pi}{2}) = -1$.
Soit $l \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ quelconques :
   - **Cas 1** : $l \geqslant 0$. D'après la question 1, il existe n tel que $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} < \dfrac{1}{2n\pi} < \alpha$ or $\sin(\frac{1}{x}) = -1$ et $l \geqslant 0$ donc $\left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| \geqslant 1 > \frac{1}{2}$.
   - **Cas 2** : $l < 0$. D'après la question 1, il existe n tel que $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} < \dfrac{1}{2n\pi} < \alpha$ or $\sin(\frac{1}{x}) = 1$ et $l < 0$ donc $\left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| > 1 > \frac{1}{2}$.

   Dans les deux cas, on a trouvé $x \in]-\alpha, \alpha[$ non nul tel que $\left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| > \frac{1}{2}$.

3) Montrons que la fonction n'admet pas de limite en 0.
La définition de l'existence d'une limite en 0 est :
Il existe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant pour tout ε il existe $\alpha > 0$ tel que $(x \neq 0 \text{ et } |x| < \alpha) \;\Rightarrow\; \left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| < \varepsilon$.

   La négation est :
Pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe ε vérifiant pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x \neq 0$ et $|x| < \alpha)$ et $\left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| \geqslant \varepsilon$.
Or nous avons démontré dans la question 2. que pour tout l, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vérifie pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x \neq 0$ et $|x| < \alpha)$ et $\left|\sin(\frac{1}{x}) - l\right| \geqslant \varepsilon$.
Donc la fonction $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 8

8. Si $x > 0$ alors $\dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = \dfrac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = 2$.

Si $x < 0$ alors $\dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = \dfrac{x^2 - 2x}{x} = x - 2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = -2$.

Il n'y a pas de limite en 0 mais seulement une limite à droite et une limite à gauche.

9. Soit $x \geqslant -1$ non nul, on note $E_9(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$.

$E_9(x) = \dfrac{(1+x) - (1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} 1 - x = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2} = 2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} E_9(x) = \dfrac{1}{2}$.

10. Soit $x > 0$, on note $E_{10}(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\ (\sqrt{x+1}-1)$.

Or $\sqrt{x+1}-1 = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$.

Donc $E_{10}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} E_{10}(x) = 0$.

12. Soit $x < 0$, on note $E_{12}(x) = x(\sqrt{1+x^2}+x)$.

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$ donc $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

On en déduit que $E_{12}(x) = x^2(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1})$.

De plus $1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \dfrac{1-(\frac{1}{x^2}+1)}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \dfrac{1}{x^2}\ \dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$.

On en conclut que $E_{12}(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$ et que $\lim\limits_{x\to -\infty} E_{12}(x) = \dfrac{-1}{2}$.

13. Soit $x \neq 0$, $-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}\ \sin(\frac{1}{\sqrt{x}}) \leqslant \sqrt{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \sin(\dfrac{1}{\sqrt{x}}) = 0$.

16. Soit $x \neq 0$ au voisinage de 0, $\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{x}\ \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)} = 2$.

17. Soit $x \neq 0$, on note $E_{17}(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{(x^2+1)|\sin(x)|}}{x}$.

On montre que $E_{17}(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

On définit la suite (x_n) de terme général $x_n = n\pi$ et la suite (x'_n) de terme général $x'_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, $|\sin(x_n)| = 0$ donc $E_{17}(x_n) = 1$ et $\lim E_{17}(x_n) = 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, $|\sin(x'_n)| = 1$ donc $E_{17}(x'_n) = 1 + \dfrac{\sqrt{(x'_n)^2+1}}{x'_n} = 1 + \sqrt{1+\dfrac{1}{(x'_n)^2}}$ (car $x'_n \geqslant 0$).

Or $\lim x'_n = +\infty$ donc $\lim E_{17}(x'_n) = 2$.

Comme $\lim x_n = \lim x'_n = +\infty$, si $E_{17}(x)$ admettait un limite en $+\infty$, on aurait $\lim E_{17}(x_n) = \lim E_{17}(x'_n)$, ce qui n'est pas le cas, donc on peut conclure que $E_{17}(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

20. Soit $x \geqslant 0$, on note $E_{20}(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$.

Au voisinage de $+\infty$, le terme prépondérant du dénominateur est x, on factorise donc celui-ci.

On obtient alors $E_{20}(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}\ \dfrac{e}{1+\frac{2}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e}{1+\frac{2}{x}} = e$ et, en faisant le changement de variable $X = \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{e^X}{X^2} = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} E_{20}(x) = +\infty$.

21. A faire avec un développement limité d'ordre 1.

22. 2 est une racine $x^3 - 8$. On effectue la division euclidienne de $x^3 - 8$ par $x - 2$. On obtient la factorisation $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

On peut voir cette factorisation comme une application de la formule $1-a^n = (1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})$.

Soit $x > 2$, on a donc $(x-2)^2 \ln(x^3 - 8) = (x-2)^2 \ln(x-2) + (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4)$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x^2 + 2x + 4) = \ln 12$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^2 + 2x + 4) = 0$.

En faisant le changement de variable $X = x - 2$, on a $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) = \lim\limits_{X\to 0^+} X^2 \ln(X) = 0$.

On en conclut que $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8) = 0$.

23. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^2 + 2) = \ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x - x \ln(x^2 + 2)) = 0$.

24. Au voisinage de $+\infty$, le terme prépondérant du numérateur est e^{x^2} et celui du dénominateur est x^2, on factorise donc par ceux-ci.

Soit $x > 1$, $\dfrac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} = \dfrac{e^{x^2}}{x^2} \dfrac{e^{x-x^2} - 1}{1 - \frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-x^2} = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-x^2} - 1}{1 - \frac{1}{x}} = -1$.

En faisant le changement de variable $X = x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$.

On en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x} = -\infty$.

25. A faire avec un développement limité d'ordre 1.

26. A faire avec un développement limité d'ordre 1.

27. On note $E_{27}(x) = \Big(\dfrac{x^3 + 5}{x^2 + 2}\Big)^{\frac{x+1}{x^2+1}} = \exp\Big(\dfrac{x+1}{x^2+1} \ln\big(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\big)\Big)$.

On utilise les termes prépondérants de chaque fraction.

Soit $x \neq 0$, on a $\dfrac{x+1}{x^2+1} = \dfrac{1}{x} \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$. On pose $A(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$.

De même, $\dfrac{x^3 + 5}{x^2 + 2} = x \dfrac{1 + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}}$. On pose $B(x) = \dfrac{1 + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}}$.

On peut donc écrire $E_{27}(x) = \exp\Big(\dfrac{1}{x} A(x) \ln\big(xB(x)\big)\Big)$.

On peut ajouter que $\dfrac{1}{x} A(x) \ln(xB(x)) = A(x) \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x} A(x) \ln(B(x))$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(B(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} A(x) \ln(B(x)) = 0$.

De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} A(x)\frac{\ln(x)}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}A(x)\ \ln(xB(x)) = 0$.

On peut enfin conclure que $\lim_{x\to+\infty} E_{27}(x) = 1$.

28. Soit $x \geqslant 0$, on note $E_{28}(x) = \Big(\frac{e^x+1}{x+2}\Big)^{\frac{1}{x+1}} = \exp\Big(\frac{1}{x+1}\ \ln\big(\frac{e^x+1}{x+2}\big)\Big)$.

On a $\frac{e^x+1}{x+2} = \frac{e^x}{x}\ \frac{1+e^{-x}}{1+\frac{2}{x}}$.

En posant $A(x) = \ln\big(\frac{1+e^{-x}}{1+\frac{2}{x}}\big)$, on a $\ln\big(\frac{e^x+1}{x+2}\big) = \ln\big(\frac{e^x}{x}\big) + A(x)$.

Or $\ln\big(\frac{e^x}{x}\big) = \ln(e^x) - \ln(x) = x - \ln(x)$, donc $\frac{1}{x+1}\ \ln\big(\frac{e^x+1}{x+2}\big) = \frac{x}{x+1} - \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{1}{x+1}A(x)$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x+1} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$,

on peut conclure $\lim_{x\to+\infty} E_{28}(x) = e$.

Exercice 9

1) f est négative donc $f([0,+\infty[)$ est majorée par 0. Une partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On note $l = \sup f([0,+\infty[)$.

   D'après la propriété des bornes supérieures : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,+\infty[,\ f(x) \leqslant l\ . \\ \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } x \in [0,+\infty[\text{ tel que } f(x) > l - \varepsilon. \end{cases}$

   Montrons que f admet pour limite l en $+\infty$.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A \in [0,+\infty[$ tel que $f(A) > l - \varepsilon$.
   f est croissante donc pour tout $x > A$, $f(x) > l - \varepsilon$, de plus on sait que $f(x) \leqslant l$ donc $|f(x) - l| < \varepsilon$.
   On a bien vérifié la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

2) On montre que f admet une limite à droite en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. On peut faire de même pour la limite à gauche.

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. f est croissante donc $f(]x_0,+\infty[)$ est minoré par $f(x_0)$ et admet une borne inférieure que l'on note $l_d = \inf f(]x_0,+\infty[)$.

   D'après la propriété des bornes inférieures : $\begin{cases} \text{pour tout } x \in]x_0,+\infty[,\ f(x) \geqslant l_d\ . \\ \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } x \in]x_0,+\infty[\text{ tel que } f(x) < l_d + \varepsilon. \end{cases}$

   Montrons que f admet pour limite l_d à droite en x_0.
   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in]x_0,+\infty[$ tel que $f(a) < l_d + \varepsilon$.

   On pose $\alpha = a - x_0$. On a $\alpha > 0$.
   D'après la croissante de f et les propriétés de l_d, pour tout x vérifiant $x_0 < x < x_0 + \alpha = a$, on a $l_d \leqslant f(x) < f(a) < l_d + \varepsilon$.

   On a donc trouvé $\alpha > 0$ tel que $(x > x_0 \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l_d| < \varepsilon$.
   On a vérifié la définition de $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$.

   Exemple de fonction croissante sur $\mathbb{R}$ sans limite en 0 :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x+1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ donc f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 10

On note T la période de f et a la limite de f en $+\infty$ (a est infini ou fini).

On montre d'abord que $a \in \mathbb{R}$.

Considérons la suite de terme général $u_n = nT$.
Comme $\lim u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, on a $\lim f(u_n) = a$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(nT) = f(0)$, donc $\big(f(u_n)\big)$ est constante et a pour limite $f(0)$. Il suit que $a \in \mathbb{R}$.

On montre ensuite que f est constante, c'est-à-dire, que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $f(x) = f(y)$.

Soit x et y quelconques, on définit les suites de terme général $v_n = x + nT$ et $w_n = y + nT$.

Comme $\lim v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, on a $\lim f(v_n) = a$. De même $\lim f(w_n) = a$.

$\big(f(v_n)\big)$ est constante et égale à $f(x)$, $\big(f(w_n)\big)$ est constante et égale à $f(y)$ et ces deux suites ont pour limite a, on peut en conclure $f(x) = a = f(y)$ (CQFD).

Exercice 11

1) On note $[a, b]$ ($a < b$) le segment sur lequel f est définie. On a $f : [a, b] \to [a, b]$.
   On en déduit que $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$.
   Considérons la fonction $g = f - Id$. D'après ce qui précède $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$.

   x est un point fixe de f équivaut à $g(x) = 0$. On cherche donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

   - Cas 1 : $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$: $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ selon le cas convient.
   - Cas 2 : $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$. g est continue car c'est la différence de deux fonctions continues. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g(x_0) = 0$.

   On peut donc conclure que f admet dans tous les cas au moins un point fixe $x_0 \in [a, b]$.

2) Considérons la fonction $g = f - Id$.
   f est minorée et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = +\infty$.
   f est majorée et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$.
   Comme g est continue, on en déduit que l'image de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$, en particulier $0 \in g(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, autrement dit, il existe un point fixe pour f.

3) Soit T la période de f. f est continue donc elle est bornée sur le segment $[0, T]$. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, T]$.
   On montre que M majore $|f|$ sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel, on cherche $y \in [0, T]$ tel que $x - y$ est un multiple de T. y doit s'écrire sous la forme $y = x - nT$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
   On choisit $n = \mathrm{E}(\frac{x}{T})$ et on vérifie que $y = x - nT \in [0, T]$.
   D'après la définition de la partie entière, on a $n \leqslant \frac{x}{T} < n + 1$ donc $nT \leqslant x < (n + 1)T$ qui implique $0 \leqslant x - nT < T$. On a bien $y = x - nT \in [0, T]$.

   Comme T est la période de f, $f(x) = f(y)$ donc $|f(y)| \leqslant M$ implique $|f(x)| \leqslant M$.
   On a fait le raisonnement pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $|f|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par M.
   D'après la question précédente, on en déduit que f admet un point fixe.