Feuille de TD n° 6 : Correction (1e partie)

Espaces vectoriels

Exercice 3

5) Soient α et β des scalaires réels tels que $\alpha(u_n) + \beta(v_n) = 0$ où 0 est la suite nulle.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha r^n + \beta n r^n = 0$ où 0 est cette fois-ci le réel nul.

Comme $r \neq 0$, il suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + \beta n = 0$.

Avec deux valeurs distincts n_1 et n_2 de n (par exemple $n_1 = 0$ et $n_2 = 1$), on obtient un système homogène de 2 équations à 2 inconnues α et β dont le déterminant est non nul (sa valeur est $n_2 - n_1$). L'unique solution est donc $\alpha = \beta = 0$.

On a montré que pour tous α et β réels, $\alpha(u_n) + \beta(v_n) = 0$ implique $\alpha = \beta = 0$, donc la famille $((u_n), (v_n))$ est linéairement indépendantes.

6) Soient α et β des scalaires réels tels que $\alpha A + \beta B + \gamma I = 0$ où 0 est la matrice nulle 3×3.

On en déduit un système de 9 équations portant sur chaque coefficient de la matrice nulle 3×3. Comme il s'agit d'un système linéaire homogène à 3 inconnues, pour conclure à l'unicité de la solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$, il suffit de trouver un sous-système de 3 équations dont le déterminant est non nul.

Par exemple on choisit les équations portant sur les coefficients d'indices $(1, 1)$, $(2, 1)$ et $(3, 1)$. On obtient le système suivant d'inconnues α, β et γ :

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3\alpha & +\beta & +\gamma & = & 0 \\ \alpha & +\beta & & = & 0 \\ 2\alpha & +\beta & & = & 0 \end{array}\right.$$

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ (développement par rapport à la dernière colonne).

Ce déterminant est non nul donc le système admet pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a montré que pour tous α, β et γ réels, $\alpha A + \beta B + \gamma I = 0$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille (A, B, I_n) est linéairement indépendantes.

Exercice 4

1) v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires car leurs composantes ne sont pas proportionnelles, de même pour v_1 et v_3, puis v_2 et v_3.

2) (v_1, v_2, v_3) est linéairement indépendante si et seulement si c'est une base de $\mathbb{R}^3$ (car on a 3 vecteurs dans un espace de dimension 3), autrement dit si le déterminant de (v_1, v_2, v_3) dans une base quelconque est non nul.

En notant $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a (développement par rapport à la première colonne) :

$$\det_{\mathcal{B}_0} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 16 + 8 = 0$$

Donc (v_1, v_2, v_3) n'est pas linéairement indépendante.

Conclusion : une famille de 3 vecteurs (ou plus) peut être liée bien que ses vecteurs soient tous deux à deux non colinéaires.

Exercice 9

2) On note G le sous espace de $\mathbb{R}^3$ dont une équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = \ \ s - t \\ y = -s - t \\ z = 2s - t \end{cases} \quad \text{où } s \text{ et } t \text{ sont dans } \mathbb{R}.$$

En notant $a = (1, -1, 2)$ et $b = (-1, -1, -1)$, cette définition est équivalente à $G = \langle a, b \rangle$, autrement dit, (a, b) est une famille génératrice de G. De plus a et b ne sont pas colinéaires, donc (a, b) est une base de G.

Un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à G si et seulement si u vérifie l'équation paramétrique de G, autrement dit si et seulement si le système suivant admet des solutions s et t dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} s - t = x \\ -s - t = y \\ 2s - t = z \end{cases}$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ -1 & -1 & y \\ 2 & -1 & z \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & x+y \\ 0 & 1 & z-2x \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & z-2x \\ 0 & 0 & x+y+2(z-2x) \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 + 2L_3 \end{array}$$

Le système admet des solutions si et seulement si $x + y + 2(z - 2x) = -3x + y + 2z = 0$.
On en déduit que G a pour équation $3x - y - 2z = 0$.

Exercice 10

2) $(x,1,1,y) \in \langle e_1, e_2\rangle$ si et seulement si il existe α et β tels que $(x,1,1,y) = \alpha e_1 + \beta e_2$, autrement dit si le système suivant d'inconnues α et β admet des solutions :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha - 4\beta = y \end{cases}$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & y \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & y-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -4 & 1-2x \\ 0 & 0 & 1-3x \\ 0 & 0 & y-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L1 \\ L_3 - 3L1 \\ L_4 \end{array}$$

Le système admet des solutions si et seulement si $1 - 3x = 0$ et $y - 2 = 0$ c'est à dire $x = \frac{1}{3}$ et $y = 2$.

On conclut que $(x,1,1,y) \in \langle e_1, e_2\rangle$ si et seulement si $x = \frac{1}{3}$ et $y = 2$.

Exercice 11

Chercher les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ signifie chercher tous les réels λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 = 0$.

On résout donc le système suivant d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 16 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L3 \\ L_2 \\ L_3/5 \\ L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + 2L_3 \\ L_3 \end{array}$$

On obtient donc le système équivalent : (S) $\begin{cases} \lambda_1 = \quad -\lambda_4 \\ \lambda_2 = \quad -4\lambda_5 \\ \lambda_3 = -3\lambda_4 + \lambda_5 \end{cases}$

En choisissant $(\lambda_4, \lambda_5) = (1, 0)$ on obtient que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, -3)$ et donc que $v_4 = v_1 + 3v_3$.

En choisissant $(\lambda_4,\lambda_5)=(0,1)$ on obtient que $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,-4,1)$ et donc que $v_5=4v_2-v_3$.

Donc $\langle v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\rangle$ est engendré par (v_1,v_2,v_3).

De plus (v_1,v_2,v_3) est une famille linéairement indépendante car pour tous λ_1, λ_2 et λ_3, $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0$ s'écrit $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3+\lambda_4v_4+\lambda_5v_5=0$ avec $(\lambda_4,\lambda_5)=(0,0)$.

D'après la résolution précédente, cela implique $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$.

On en conclut que (v_1,v_2,v_3) est une base de l'espace engendré par (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) et par conséquent $\mathrm{rang}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=3$.

Exercice 12

4) On cherche les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs $v_1=(2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2=(1,1,2,1,3,1)$, $v_3=(0,-1,0,3,6,2)$, cela signifie chercher tous les réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0$.

On résout donc le système (S) suivant d'inconnues $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ -2 & 3 & 6 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)$

Or le sous-système $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\end{array}\right)$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1$ (développement par rapport à la dernière colonne).

Le déterminant est non nul donc l'unique solution du sous-système est $(0,0,0)$, par conséquent le système homogène (S) a aussi pour unique solution $(0,0,0)$.

On en conclut que la famille (v_1,v_2,v_3) est linéairement indépendante et donc $\mathrm{rang}(v_1,v_2,v_3)=3$.

4) On cherche les relations de dépendance linéaires entre les vecteurs $v_1=(2,1,3,-1,4,-1)$, $v_2=(-1,1,-2,2,-3,3)$, $v_3=(1,5,0,4,-1,7)$, cela signifie chercher tous les réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=0$.

On résout donc le système suivant d'inconnues $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 4 & 0\\ 4 & -3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 7 & 0\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & -3 & -9 & 0\\ 0 & -5 & -15 & 0\\ 0 & 3 & 9 & 0\\ 0 & -7 & -21 & 0\\ 0 & 4 & 12 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l} L_2\\ L_1-2L_2\\ L_3-3L_2\\ L_4+L_2\\ L_5-4L_2\\ L_6+L_2\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l} L_1\\ -L_2/3\\ -L_3/5\\ L_4/3\\ -L_5/7\\ L_6/4\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \\ -L_5 - L_2 \\ L_6 - L_2 \end{array}$$

On obtient donc le système équivalent : $(S) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \end{cases}$

En choisissant $\lambda_3 = 1$ on obtient que $(\lambda_1, \lambda_2) = (-2, -3)$ et donc que $v_3 = 2v_1 + 3v_2$.

Il suit que $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ est engendré par (v_1, v_2)

De plus (v_1, v_2) est une famille linéairement indépendante car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

On en conclut que (v_1, v_2) est une base de l'espace engendré par (v_1, v_2, v_3) et donc $\text{rang}(v_1, v_2, v_3) = 3$.

Exercice 13
Etudions d'abord si la famille (u_1, u_2, u_3) est de rang 3.
(u_1, u_2, u_3) est de rang 3 si et seulement si c'est une base de $\mathbb{R}^3$ car on a 3 vecteurs dans un espace de dimension 3.

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique, en développant selon la première colonne,

$$\det_{\mathcal{B}_0}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2$$

Donc $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3$ si et seulement si $t \neq 1$ et $t \neq -1$.

Cas $t = 1$: on a $u_1 = u_3 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$. Comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, on en déduit que l'espace engendré par (u_1, u_2, u_3) est de dimension 2 donc $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

Cas $t = -1$: on a $u_1 = -u_3 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (1, 1, -1)$. Comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, on en déduit que l'espace engendré par (u_1, u_2, u_3) est de dimension 2 donc $\text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 2$.

Exercice 14
Les vecteurs $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ et $(1, c, c^2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si leur déterminant dans la base canonique est non nul.

Ce déterminant est $\quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

En faisant l'opération $C_2 \to C_2 - C_1$ et $C_3 \to C_3 - C_1$ puis en utilisant la linéarité par rapport à la 2ème puis la 3ème colonne, et enfin en développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-b)(c-a) \end{aligned}$$

Conclusion : Les vecteurs $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ et $(1, c, c^2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si a, b et c sont deux à deux distincts.

Exercice 15

A chaque fois, il faut résoudre le système défini par les équations du sous-espaces. A partir de l'expression paramétrique des solutions, on obtient une famille génératrice dont on vérifie l'indépendance linéaire.

1. On note F_1 le sous espace défini par l'équation de la **question 1**.

Le système admet pour unique solution le vecteur nul, donc $F_1 = \{(0, 0)\}$ de dimension 0. Il n'y a pas de base (on peut aussi dire que l'unique base est la famille vide).

2. On note F_2 le sous espace défini par l'équation de la **question 2**.

L'ensemble des solutions du système est
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/$ il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = (\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu, \lambda, \mu)\}$
Comme $(\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu, \lambda, \mu) = \lambda(\frac{3}{2}, 1, 0) + \mu(-\frac{1}{2}, 0, 1)$,
en posant $u = (\frac{3}{2}, 1, 0)$ et $v = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$, on en déduit que (u, v) engendre F_2.

De plus u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est une base de F_2 et $\dim F_2 = 2$.

3. On note F_3 le sous espace défini par l'équation de la **question 3**.

L'ensemble des solutions du système est
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, \lambda)\}$
En posant $u = (-1, 1, 1)$, on en déduit que (u) est une base de F_3 et $\dim F_3 = 1$.

4. On note F_4 le sous espace défini par l'équation de la **question 4**.

Le déterminant du système est non nul, donc il admet pour unique solution le vecteur nul. $F_4 = \{(0, 0, 0)\}$ de dimension 0. Il n'y a pas de base (on peut aussi dire que l'unique base est la famille vide).

5. On note F_5 le sous espace défini par l'équation de la **question 5**.

L'ensemble des solutions du système est
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4/$ il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z, t) = (-\lambda - 3\mu, \lambda - 2\mu, \lambda, \mu)\}$
Comme $(-\lambda - 3\mu, \lambda - 2\mu, \lambda, \mu) = \lambda(-1, 1, 1, 0) + \mu(-3, -2, 0, 1)$,
en posant $u = (-1, 1, 1, 0)$ et $v = (-3, -2, 0, 1)$, on en déduit que (u, v) engendre F_5.

De plus u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est une base de F_5 et $\dim F_5 = 2$.