Feuille de TD n°4 - Correction

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 3
On utilise la méthode de Gauss. Il ne faut pas être arrêté par la présence d'une inconnue a dans le sytème : c'est un nombre comme un autre.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ -1 & 3 & a & | & -1 \\ a & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & a+3 & a+3 & | & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 2-3a & | & -a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+L_1 \\ L_3-aL_1 \end{array}$$

Pour pouvoir diviser la deuxième ligne par $a+3$, on est obligé de supposer $a \neq -3$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 2-3a & | & -a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/(a+3) \\ L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a & | & -a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-(2-a^2)L_2 \end{array}$$

Pour diviser la dernière ligne par $a^2-3a = a(a-3)$, on est obligé de supposer $a \neq 0$ et $a \neq 3$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/(3-a) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/(a^2-3a) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/(3-a) \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/(3-a) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/(3-a) \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/(3-a) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1-aL_2-3L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Finalement, on trouve comme solution $(x, y, z) = (0, -1/(3-a), 1/(3-a))$, pour $a \notin \{-3, 0, 3\}$. Mais que se passe-t-il si $a = -3$, $a = 0$ ou $a = 3$? Il suffit de résoudre le système dans ces trois cas.

1. Si $a = -3$. On retourne à la deuxième étape dans le résolution précédente (c'est-à-dire au moment où on a dû supposer $a \neq -3$), le système est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & a+3 & a+3 & | & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 2-3a & | & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -7 & 11 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -11/7 & | & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_3/(-7) \\ L_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12/7 & | & -2/7 \\ 0 & 1 & -11/7 & | & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1+3L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Comme il y a une colonne sans pivot autre que la dernière (c'est la troisième), il y a une infinité de solutions. On pose donc $z = \lambda$ en paramètre, et on obtient :

$$x = \frac{1}{7}(-2+12\lambda) \qquad y = \frac{1}{7}(-3+11\lambda) \qquad z = \lambda$$

Géométriquement, il s'agit de la droite passant par le point $A(-2/7, -3/7, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(12/7, 11/7, 1)$.

2. Si $a = 0$. On retourne à la quatrième étape dans le résolution précédente (c'est-à-dire au moment où on a dû supposer $a \neq 0$), le système est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a & | & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

À nouveau, il y a une colonne sans pivot autre que la dernière (c'est la troisième), donc il y a une infinité de solutions. On pose $z = \lambda$ en paramètre, et on obtient :

$$x = 1 - 3\lambda \qquad y = -\lambda \qquad z = \lambda$$

Géométriquement, il s'agit de la droite passant par le point $A(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3, -1, 1)$.

3. Si $a = 3$. On retourne encore à la quatrième étape dans le résolution précédente (c'est-à-dire au moment où on a dû supposer $a \neq 3$), le système est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a & | & -a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3/(-3) \end{array}$$

Cette fois-ci, on a un pivot sur la dernière colonne, donc le système n'a pas de solution.

Exercice 4

a) On résout le système avec la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & a \\ 5 & 5 & 4 & | & b \\ 2 & -1 & 1 & | & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & c \\ 0 & 5 & 1 & | & b-a-c \\ 0 & 5 & 1 & | & 2a-3c \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \\ L_2 - L_1 - L_3 \\ 2L_1 - 3L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & | & c/2 \\ 0 & 1 & 1/5 & | & (b-a-c)/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-3a+2c \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/5 \\ L_2 - L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & | & (b-a+4c)/10 \\ 0 & 1 & 1/5 & | & (b-a-c)/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-3a+2c \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 + L_2/2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Si $b - 3a + 2c \neq 0$, on peut diviser la dernière ligne par $b - 3a + 2c$; on a alors un pivot sur la dernière colonne, donc il n'y a pas de solution. Réciproquement, si $b - 3a + 2c = 0$, on a une matrice échelonnée sans pivot sur la dernière colonne. Comme de plus il n'y a pas de pivot sur une colonne autre que la dernière (nommément, la troisième), il y a une infinité de solutions. On pose $z = \lambda$ en paramètre, et on obtient :

$$x = \frac{-a+b+4c}{10} - \frac{3}{5}\lambda \qquad y = \frac{-a+b-c}{5} - \frac{1}{5}\lambda \qquad z = \lambda$$

Géométriquement, il s'agit de la droite passant par le point de coordonnées $((-a+b+4c)/10, (-a+b-c)/5, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3/5, -1/5, 1)$.

b) Même méthode.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & a \\ -1 & 2 & 0 & | & b \\ -1 & -5 & -2 & | & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & a \\ 0 & 7 & 2 & | & 3b+a \\ 0 & -14 & -4 & | & 3c+a \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ 3L_2 + L_1 \\ 3L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2/3 & | & a/3 \\ 0 & 1 & 2/7 & | & (3b+a)/7 \\ 0 & 0 & 0 & | & a+2b+c \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2/7 \\ (L_3 + 2L_2)/3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/7 & | & (-b+2a)/7 \\ 0 & 1 & 2/7 & | & (3b+a)/7 \\ 0 & 0 & 0 & | & a+2b+c \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2/3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Si $a + 2b + c \neq 0$, on peut diviser la dernière ligne par $a + 2b + c$; on a alors un pivot sur la dernière colonne, donc il n'y a pas de solution. Réciproquement, si $a+2b+c = 0$, on a une matrice échelonnée sans pivot sur la dernière colonne. Comme de plus il n'y a pas de pivot sur une colonne autre que la dernière (nommément, la troisième), il y a une infinité de solutions. On pose $z = \lambda$ en paramètre, et on obtient :

$$x = \frac{2a-b}{7} - \frac{4}{7}\lambda \qquad y = \frac{a+3b}{5} - \frac{2}{7}\lambda \qquad z = \lambda$$

Géométriquement, il s'agit de la droite passant par le point de coordonnées $((2a-b)/7, (a+3b)/7, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-4/7, -2/7, 1)$.

Exercice 5

On applique la méthode du pivot de Gauss pour trouver les solutions du système.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 0 & m(m+2) & m & 0 \\ 0 & m & m(m+2) & 0 \end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ (1+m)L_2 - L_1 \\ (1+m)L_3 - L_1 \end{array}$$

Notez que avoir le droit de multiplier L_2 et L_3 par $1+m$, il faut supposer $1+m \neq 0$, donc $m \neq -1$. D'autre part, pour pouvoir diviser la deuxième ligne par $m(m+2)$, on est obligé de supposer en plus $m \neq 0$ et $m \neq -2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/(m+1) & 1/(m+1) & 0 \\ 0 & 1 & 1/(m+2) & 0 \\ 0 & m & m(m+2) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \frac{1}{1+m}L_1 \\ \frac{1}{m(m+2)}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/(m+1) & 1/(m+1) & 0 \\ 0 & 1 & 1/(m+2) & 0 \\ 0 & 0 & m(m+2) - m/(m+2) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - mL_2 \end{array}$$

À la dernière ligne, on peut simplifier :

$$\begin{aligned} m(m+2) - \frac{m}{m+2} &= \frac{m}{m+2}\left((m+2)^2 - 1\right) \\ &= \frac{m}{m+2}(m^2 + 4m + 3) \\ &= \frac{1}{m+2} m(m+1)(m+3) \end{aligned}$$

On a déjà supposé $m \notin \{-2, -1, 0, \}$. En supposant en plus $m \neq -3$, on obtient le système échelonné :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/(m+1) & 1/(m+1) & 0 \\ 0 & 1 & 1/(m+2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{m+2}{m(m+1)(m+3)}L_3 \end{array}$$

Ce système admet un pivot sur chaque colonne sauf la dernière, donc il admet une solution unique, à savoir $(0,0,0)$ puisque c'est un système homogène. Il n'y a donc pas de solutions non nulles si $m \notin \{-3, -2, -1, 0\}$. Il reste à examiner le cas $m \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

1. Si $m = -3$. On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/(-2) \\ L_2/(-3) \\ L_3 + L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_2/2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

   Il y a une colonne sans pivot autre que la dernière (c'est la troisième), donc le système admet une infinité de solutions. On pose $z = \lambda$ en paramètre, et on trouve :

$$x = \lambda \qquad y = \lambda \qquad z = \lambda$$

   Géométriquement, il s'agit de la droite passant par $O(0,0,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,1)$.

2. Si $m=-2$. On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+L_1 \\ L_3+L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -L_1 \\ L_3/2 \\ L_2/2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1+L_2+L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

La seule solution est la solution nulle.

3. Si $m=-1$. On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ L_3-L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ -L_3+L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1-L_3/2 \\ L_2-L_3/2 \\ L_3/2 \end{array}$$

La seule solution est la solution nulle.

4. Si $m=0$. On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array}$$

Il y a deux colonnes sans pivot (sans compter la dernière), donc il y a une infinité de solutions. On pose en paramètre $y=\lambda$ et $z=\mu$. On obtient comme solution :

$$x=-\lambda-\mu \qquad y=\lambda \qquad z=\mu$$

Géométriquement, il s'agit du plan passant par $O(0,0,0)$ et dont les vecteurs $\vec{u}(-1,1,0)$ et $\vec{v}(-1,0,1)$ forment une base. On peut aussi dire que c'est le plan d'équation $x+y+z=0$.

Exercice 6
Le problème des bœufs de Newton
Les inconnues du problème sont :
- la quantité d'herbe qui pousse en un jour sur un are notée a,
- la quantité d'herbe broutée en un jour par un boeuf notée b,
- la quantité d'herbe par are à l'entrée des boeufs dans chacun des trois champs notée c,
- le nombre de boeufs nécessaires pour brouter le troisième pré notée n.

Chaque pré fournit une équation et on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 75b12 & = & 60(c+a12) \\ 81b15 & = & 72(c+a15) \\ nb18 & = & 96(c+a18) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2^2.3\ a & - & 3.5\ b & + & c & = & 0 \\ 2^3.3.5\ a & - & 3^3.5\ b & + & 2^3\ c & = & 0 \\ 2^5.3^2\ a & - & 3\ n\ b & + & 2^4\ c & = & 0 \end{array}\right.$$

En considérant n comme un paramètre et a, b et c comme des inconnues, il s'agit d'un système homogène de 3 équations linéaires à 3 inconnues. Ce système a au moins la solution triviale $(a,b,c)=(0,0,0)$. Si c'est la solution unique de ce système, cela signifie que les boeufs ne broutent pas et que les prés n'ont pas d'herbe. Il faut donc qu'il y ait d'autres solutions ce qui imposera une condition sur n.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, le système précédent est équivalent à (pour simplifier les calculs, on écrit les entiers par leur décomposition en facteurs premiers) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} c & + & 2^2.3\ a & - & 3.5\ b & = & 0 \quad (L_1) \\ & & 2^2.3\ (2.5-2^3)\ a & - & 3.5\ (3^2-2^3)\ b & = & 0 \quad (L_2-2^3L_1) \\ & & 2^2.3\ (2^3.3-2^4)\ a & - & 3(n-2^4.5)\ b & = & 0 \quad (L_3-2^4L_1) \end{array}\right.$$

qui s'écrit après calculs

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c & + & 2^2.3\ a & - & 3.5\ b & = & 0 \\ & & 2^3.3\ a & - & 3.5\ b & = & 0 \\ & & 2^5.3\ a & - & 3(n-2^4.5)\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

En continuant la méthode du pivot de Gauss, ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 2\ c & & & - & 3.5\ (2-1)\ b & = & 0 & (2L_1 - L_2) \\ & 2^3 & a & - & 5\ b & = & 0 & (L_2/3) \\ & 2^5 & a & - & (n-2^4.5)\ b & = & 0 & (L_3/3) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2\ c & = & 3.5\ b & (L_1) \\ 2^3\ a & = & 5\ b & (L_2) \\ (n-2^4.5-2^2.5)\ b & = & 0 & (-L_3+2^2L_2) \end{array}\right.$$

Ce système a une autre solution que $(a,b,c)=(0,0,0)$ si et seulement si $n-2^4.5-2^2.5=0$ c'est-à-dire si $n=2^2.5(2^2+1)=100$.

Il faut donc 100 boeufs pour brouter le troisième champ.