Investissement stratégique et fluctuations endogènes

Claude d'Aspremont [*]
Rodolphe Dos Santos Ferreira [**]
Louis-André Gérard-Varet [***]

Résumé

Nous étudions une économie multi-branches à générations imbriquées, où les entreprises de chaque branche vivent deux périodes, investissant stratégiquement en première et produisant sous régime de concurrence cournotienne en seconde période. Les équilibres des jeux en deux étapes, ainsi que sur les marchés des produits, du travail et du capital, déterminent le nombre d'entreprises à chaque période et un système dynamique à deux équations. L'émergence de fluctuations endogènes robustes comme conséquence de l'investissement stratégique est mise en lumière par contraste avec un modèle sans investissement stratégique et avec libre entrée.

STRATEGIC INVESTMENT AND ENDOGENOUS FLUCTUATIONS

We study an overlapping generations multisectoral economy, where firms in each sector live two periods, strategically investing in the first and producing under Cournot competition in the second period. Equilibrium conditions for the two-stage games, and on the product, labor and capital markets, determine the number of active firms and result in a two-equation dynamic system. The possibility of robust endogenous fluctuations coming from strategic investment is demonstrated by contrast with a model without strategic investment and with free entry.

Codes *JEL* : E22, E32, L16.

Introduction

Les décisions des entrepreneurs portant sur l'investissement ont joué un rôle central dans les premières théories keynésiennes des cycles économiques, que ce soit par le biais de l'impulsion des « esprits animaux » ou par le biais du mécanisme d'accélération. Dans les modèles macroéconomiques plus récents, ceux des nouveaux classiques comme ceux des nouveaux keynésiens, ces décisions sont passées au deuxième plan, la recherche de fondements microéconomiques ayant reporté sur les consommateurs (ou plutôt sur un

[*] CORE, Université catholique de Louvain. *Correspondance :* CORE, Université catholique de Louvain, 34 voie du Roman Pays, 1348 Louvain-la-Neuve. *Courriel :* claude.daspremont@uclouvain.be.

[**] BETA, Université de Strasbourg, et Católica Lisbon School of Business and Economics. *Correspondance :* BETA, Université de Strasbourg, 61 avenue de la Forêt noire, 67085 Strasbourg cedex. *Courriel :* rdsf@unistra.fr.

[***] GREQAM, École des hautes études en sciences sociales, Marseille.

Une première version de cet article a été complètement rédigée avant le décès de Louis-André. Les auteurs ont bénéficié de commentaires très utiles sur cette première version, en particulier de Jean-Michel Grandmont, Kiminori Matsuyama et Christian Schultz.

Les auteurs remercient les deux rapporteurs anonymes, dont les recommandations ont permis d'améliorer la présentation de l'article publié.

consommateur représentatif) la charge exclusive des décisions intertemporelles, comme si ce report était sans conséquences [1]. L'objectif de cet article est d'illustrer, au contraire, l'importance pour la dynamique économique de la prise en compte des décisions stratégiques d'investissement des entreprises, particulièrement en ce qui concerne l'émergence de fluctuations endogènes. À cet effet, nous supposerons [2] que les entreprises vivent deux périodes, la première consacrée à l'investissement, la seconde à la production sous un régime de concurrence oligopolistique à la Cournot. La concurrence entre les entreprises génère dans ce contexte un jeu à deux étapes [3].

L'idée que nous allons développer peut alors être aisément esquissée, en introduisant deux relations entre le nombre n d'entreprises actives et le facteur r de rendement du capital. La première, que nous dénoterons R, résulte des conditions d'équilibre à la seconde étape. Elle est décroissante parce qu'à un nombre plus élevé d'entreprises correspond un moindre degré de monopole [4] sur le marché du produit et donc un facteur de rendement plus faible du capital. La deuxième relation, que nous dénoterons S, incorpore la condition d'équilibre des stratégies d'investissement des entreprises à la première étape. Il apparaîtra que le facteur r de rendement du capital y répond dans le même sens, mais plus fortement, aux variations du nombre n d'entreprises.

Sur la figure 1 nous représentons en trait gras la relation S et en trait fin deux relations R dont la plus haute correspond à un facteur de croissance plus fort ($g' > g$) de l'investissement et de l'emploi. L'intersection de la courbe S et d'une courbe R détermine le nombre n d'entreprises actives. On observe qu'à une courbe R plus élevée (associée à une croissance plus forte) correspond un nombre plus faible d'entreprises et donc une concentration plus élevée.

On verra que cette corrélation est associée à un effet schumpéterien qui découle du caractère stratégique de l'investissement : la diminution du nombre d'entreprises, ayant pour conséquence d'accroître le pouvoir de marché de chacune et d'augmenter la rémunération du capital, stimule l'investissement et la croissance. Or, par un effet de gain de productivité, une accélération de la formation de capital tend de son côté à promouvoir la création d'entreprises. Nous allons montrer que le jeu de ces deux effets peut aboutir à l'émergence de fluctuations auto-entretenues.

La section 2 introduira notre modèle avec investissement stratégique des entreprises et évoquera un modèle alternatif de référence avec libre entrée, où l'investissement est déterminé de manière non stratégique. La dynamique des deux modèles sera analysée et comparée dans la section 3 et nous conclurons dans la section 4.

Le modèle

Le modèle décrit une économie à générations imbriquées, de consommateurs aussi bien que d'entreprises, vivant les uns et les autres deux périodes [5]. Un premier trait spécifique

1. « *Our assumption that households make the capital accumulation and utilization decisions is a matter of convenience. At the cost of more complicated notation, we could work with an alternative decentralization scheme in which firms make these decisions.* » (Christiano, Eichenbaum et Evans (2005), p. 13, n. 8.) Voir aussi Smets et Wouters (2003). Les modèles DSGE ne sont pas les seuls en cause ; ils sont relayés sur ce point par les modèles orientés vers les fluctuations endogènes (voir Lloyd-Braga, Modesto et Seegmuller (2014) pour une synthèse récente).

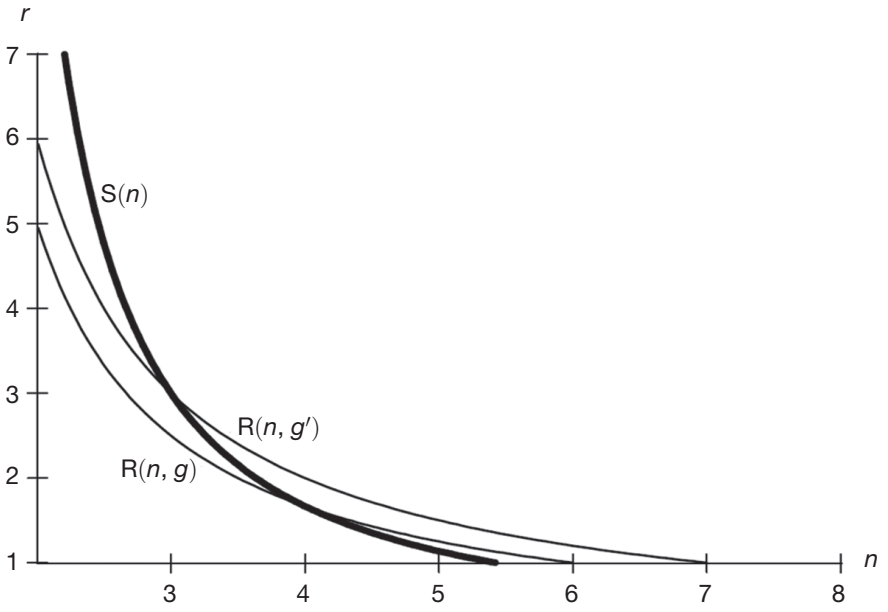
2. Comme le font Hahn et Solow (1997).

3. Ce jeu est au cœur du modèle de d'Aspremont et Jacquemin (1988).

4. On se réfère ici à l'indice de Lerner qui, dans le cas de Cournot, est égal à la part de marché de l'entreprise multipliée par l'inverse de l'élasticité de la demande.

5. On trouvera une version du même modèle, avec des résultats aléatoires de l'investissement en R&D, dans d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet (2010). Cet article est centré sur la relation entre

FIGURE 1 – Relations entre le nombre n d'entreprises et le rendement r du capital



du modèle est que les entreprises y ont un cycle de vie, consacrant la première période à la formation de capital et la seconde à la production d'un bien de consommation. Un deuxième trait spécifique est que l'interaction stratégique entre entreprises ne se limite pas au domaine usuel de la concurrence sur le marché du produit – une concurrence à la Cournot – mais s'étend au domaine des décisions d'investissement. Enfin, le troisième trait spécifique est que l'investissement, n'aboutissant à des recettes qu'une période plus tard, réclame un financement et que l'ampleur possible de la création d'entreprises est dès lors limitée par les capacités de financement disponibles dans l'économie. Nous considérerons d'abord le comportement des agents – consommateurs et entreprises –, puis nous examinerons plus spécifiquement les équilibres sur les marchés du capital et du travail.

Les consommateurs

Les consommateurs, dont chaque génération constitue un continu de masse unitaire, consomment pendant les deux périodes de leur vie et travaillent pendant la première au sein d'entreprises jeunes et mûres, indifféremment. À chaque période t, pour choisir ses paniers de consommation présente $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}_+^{[0,1]}$ et future $\mathbf{x}_{t+1} \in \mathbb{R}_+^{[0,1]}$, son épargne $s_t \in \mathbb{R}_+$ et son offre de travail $\lambda_t \in \{0,1\}$, chaque jeune consommateur résout le programme suivant :

$$\max_{(\mathbf{x}_t,\mathbf{x}_{t+1},s_t,\lambda_t)} u(\mathbf{x}_t)^\alpha u(\mathbf{x}_{t+1})^{1-\alpha} - v\lambda_t \tag{1}$$
$$\text{s.c.} \int_0^1 p_{it}x_{it}\,di + s_t \leqslant \lambda_t \quad \text{et} \quad \int_0^1 p_{it+1}x_{it+1}\,di \leqslant r_{t+1}s_t,$$

le travail étant choisi comme numéraire, $(p_{it})_{i\in[0,1]}$ et $(p_{it+1})_{i\in[0,1]}$ étant les profils de prix présents et futurs anticipés et r_{t+1} le facteur de rémunération anticipé de l'épargne. La

l'intensité de la concurrence et l'innovation, l'émergence de fluctuations auto-entretenues n'y étant pas abordée.

fonction u et les deux paramètres α et v vérifient :

$$u(\mathbf{x}) = \prod_{i\in[0,1]} x_i, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ et } v > 0. \tag{2}$$

La solution du programme est

$$x_{it} = \frac{\alpha\lambda_t}{p_{it}}, \quad x_{it+1} = \frac{r_{t+1}s_t}{p_{it+1}}, \quad s_t = (1-\alpha)\lambda_t, \tag{3}$$
$$\lambda_t = 1 \text{ ssi } v \leqslant \frac{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\mathrm{P}_t^\alpha(\mathrm{P}_{t+1}/r_{t+1})^{1-\alpha}},$$

P_t et P_{t+1} étant les moyennes géométriques des prix présents et futurs, respectivement. Par commodité, on a implicitement supposé que le consommateur offre toujours son travail lorsque l'utilité du salaire réel anticipé qui le rémunère est égale à la désutilité de ce travail.

Les entreprises

Le secteur productif est constitué par un continu de branches identiques où coexistent deux générations d'entreprises, jeunes et mûres, poursuivant respectivement une activité d'investissement et une activité de production.

Par la suite, nous nous intéresserons exclusivement à des équilibres symétriques, non seulement au sein de chaque branche mais également à travers les différentes branches de l'économie. Toutefois, l'hypothèse d'un continu de branches va nous permettre de traiter le nombre d'entreprises actives par branche comme une variable continue. Cette variable est en fait une moyenne de nombres entiers pouvant différer d'une branche à l'autre. La symétrie inter-branches ne peut donc pas être parfaite et les relations agrégées devraient faire intervenir des moyennes. Nous ferons toutefois abusivement l'économie d'une telle complication supplémentaire et supposerons simplement cette symétrie, tout en traitant n comme une variable continue.

L'interaction stratégique des choix des entreprises d'une même branche peut être vue comme un jeu à deux étapes, investissement et production. Production de capital et production de bien final se font toutes deux sur la base d'une technologie linéaire en travail, mais l'efficacité du travail employé dans la deuxième période est augmentée par le capital préalablement investi par l'entreprise, ainsi que par le capital produit chez les entreprises concurrentes.

La présence de cette externalité va nous permettre de distinguer deux types d'économies d'échelle, *internes* et *externes*, une distinction cruciale dans le cadre d'un investissement stratégique. Pour la justifier, on peut supposer que le capital véhicule une connaissance technologique et que celle-ci n'est pas complètement appropriable.

Dans chaque branche – identifiée par l'indice $i \in [0,1]$, que nous omettrons pour l'instant – chaque jeune entreprise $j \in \{1,\ldots,n_t\}$ choisit à la période t un niveau d'investissement $k_{jt} \in [0,\infty[$, obtenu avec k_{jt} unités de travail (on notera $\mathbf{k}_{-jt}$ le vecteur des niveaux d'investissement des concurrents). Devenue mûre, l'entreprise produit une quantité de biens $y_{jt+1} \in [0,\infty[$ avec $l_{jt+1} \in [0,\infty[$ unités de travail, en observant la contrainte :

$$y_{jt+1} \leqslant \mathrm{F}(l_{jt+1}, k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt}) = l_{jt+1}k_{jt}^\gamma \prod_{j'\neq j} k_{j't}^{\delta/(n_t-1)}. \tag{4}$$

Nous supposons que la fonction de production F est la même pour toutes les périodes et pour toutes les entreprises (de toutes les branches). Ce sont les paramètres positifs γ

et δ (ce dernier appliqué à la moyenne géométrique des investissements des concurrents) qui mesurent les degrés d'*économies d'échelle*, respectivement *internes* et *externes*.

Le travail étant le numéraire, on obtient comme coût unitaire constant du produit

$$c(k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt}) = k_{jt}^{-\gamma} \prod_{j' \neq j} k_{j't}^{-\delta/(n_t-1)}. \tag{5}$$

Dans le cas d'un profil symétrique des investissements ($k_{jt} = k_t$ pour tout j), on a $c(k_t, \ldots, k_t) = k_t^{-(\gamma+\delta)}$ et il s'avérera commode de noter $\beta \equiv \gamma + \delta$ le degré d'économies d'échelle *totales*.

Pour calculer l'équilibre parfait en sous-jeux, on suppose que les entreprises jouent en Cournot à la deuxième étape face à une demande $\mathrm{A}_{t+1}/\mathrm{P}_{t+1}$ (où P_{t+1} est le prix du marché en $t+1$ et A_{t+1} représente la dépense, supposée positive, effectuée par les consommateurs dans chaque branche à la période $t+1$). La solution du sous-jeu de la deuxième étape est un n_t-uplet $(y_1, \ldots, y_{n_t})$, tel qu'on vérifie pour chaque entreprise active j l'égalité de la recette marginale et du coût marginal :

$$\mathrm{P}_{t+1}\left(1 - \frac{y_{jt+1}}{\sum_{j'} y_{j't+1}}\right) = c(k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt}), \quad \text{où } \mathrm{P}_{t+1} = \frac{\mathrm{A}_{t+1}}{\sum_{j'} y_{j't+1}}. \tag{6}$$

De ces n_t égalités on peut déduire (en supposant que toutes les entreprises sont actives) :

$$y_{jt+1} = \frac{\mathrm{A}_{t+1}(n_t-1)}{\sum_{j'} c(k_{j't}, \mathbf{k}_{-j't})}\left(1 - \frac{(n_t-1)c(k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt})}{\sum_{j'} c(k_{j't}, \mathbf{k}_{-j't})}\right). \tag{7}$$

À la première étape, l'entreprise j maximise en k_{jt} l'excès du profit anticipé de la deuxième étape sur la valeur de l'investissement :

$$\Pi(k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt}) = \mathrm{A}_{t+1}\left(1 - \frac{(n_t-1)c(k_{jt}, \mathbf{k}_{-jt})}{\sum_{j'} c(k_{j't}, \mathbf{k}_{-j't})}\right)^2 - k_{jt}. \tag{8}$$

Par la suite, on s'intéressera exclusivement à l'équilibre symétrique, calculé en annexe, où toutes les jeunes entreprises choisissent l'investissement

$$k_t = \frac{2\mathrm{A}_{t+1}}{n_t^2}\left(1 - \frac{1}{n_t}\right)(\gamma n_t - \beta). \tag{9}$$

Cette équation montre bien la différence d'impact des économies d'échelle internes et externes, puisqu'elle fait apparaître k_t comme une fonction croissante du degré γ d'économies d'échelle internes et décroissante du degré $\delta = \beta - \gamma$ d'économies d'échelle externes. La positivité de k_t et la non-négativité du profit net $\Pi(k_t, \ldots, k_t)$ imposent la condition

$$0 < \gamma n_t - \beta \leqslant \frac{n_t}{2(n_t-1)}, \tag{10}$$

restreignant les valeurs admissibles de n_t en fonction des degrés d'économies d'échelle β et γ.

Le marché du capital

Sur le marché du capital, l'offre à la période t est donnée par l'épargne $(1-\alpha)\mathrm{L}_t$ générée par une masse L_t de jeunes consommateurs employés. La demande de capital est donnée par l'investissement global $\mathrm{K}_t = n_t k_t$, k_t étant la solution symétrique à la première

étape du jeu où interviennent les entreprises nées en t (voir l'équation (9)). Pour investir, les entreprises nées en t doivent se procurer le capital correspondant et l'on peut supposer qu'elles émettent dans ce but des actions auxquelles souscrivent les consommateurs employés. En $t+1$, chaque entreprise mûre produit puis distribue aux actionnaires, alors retraités, un revenu $r_{t+1}k_t$ couvrant le principal et le profit [6] $\Pi(k_t, \ldots, k_t)$.

Le profit d'une entreprise mûre en $t+1$, issu de l'équilibre du jeu de deuxième étape, brut en capital investi en t, résulte de l'application à la recette A_{t+1}/n_t de son degré de monopole, ici égal à $1/n_t$ par symétrie et par l'élasticité unitaire de la demande :

$$r_{t+1}k_t = \mathrm{A}_{t+1}/n_t^2. \tag{11}$$

La dépense globale A_{t+1} se décompose en consommation des actionnaires retraités $r_{t+1}(1-\alpha)\mathrm{L}_t = r_{t+1}\mathrm{K}_t$ et en consommation $\alpha\mathrm{L}_{t+1} = \alpha\mathrm{K}_{t+1}/(1-\alpha)$ des jeunes employés. En notant $\rho \equiv \alpha/(1-\alpha) \in]1, \infty[$ le facteur de préférence temporelle, on obtient

$$r_{t+1} = \rho\frac{\mathrm{K}_{t+1}}{\mathrm{K}_t}\frac{1}{n_t - 1} \equiv \mathrm{R}(n_t, g_{t+1}), \tag{12}$$

où $g_{t+1} \equiv \mathrm{K}_{t+1}/\mathrm{K}_t$ est le facteur de croissance du capital global. On retrouve, comme condition d'équilibre du jeu de deuxième étape, l'expression de la relation R représentée dans la figure 1.

Pour considérer le jeu de première étape, avec investissement stratégique, on utilise la condition du premier ordre (9) qui, avec l'équation (11), conduit à une deuxième expression de r_{t+1} correspondant à la relation S de la figure 1 :

$$r_{t+1} = \frac{1}{2}\frac{n_t}{\gamma n_t - \beta}\frac{1}{n_t - 1} \equiv \mathrm{S}(n_t). \tag{13}$$

Il résulte d'un simple coup d'œil sur les deux équations (12) et (13) que la fonction S est représentée sur l'espace (n_t, r_{t+1}) par une courbe plus raide que les courbes de la famille $\mathrm{R}(\cdot, g_{t+1})$, conformément à la figure 1 [7].

L'intersection des deux courbes détermine le nombre d'entreprises n_t (pour une valeur g_{t+1} donnée). Dans l'exemple de la figure 1, on obtient $n_t = 4$ si $g_{t+1} = g = 1$ (courbe basse en trait fin) et $n_t = 3$ si $g_{t+1} = g' = 1{,}2$ (courbe haute en trait fin). On observe donc une corrélation positive du taux de croissance et du degré de concentration – une propriété schumpéterienne de notre modèle.

Le marché du travail

Conformément à la solution (3) du programme du jeune consommateur, l'équilibre sur le marché du travail en t suppose que la désutilité du travail est inférieure ou égale à l'utilité de la consommation financée par le salaire réel anticipé. Nous supposerons l'égalité (associée à un niveau d'emploi $\mathrm{L}_t < 1$), afin d'obtenir, sans changement de régime, une dynamique non stationnaire :

$$v = \frac{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\mathrm{P}_t^\alpha(\mathrm{P}_{t+1}/r_{t+1})^{1-\alpha}}. \tag{14}$$

6. Les actions émises pourraient être des actions privilégiées, garantissant une rémunération minimale au taux $\bar{r} - 1$. Le revenu $r_{t+1}k_t$ couvrirait alors le principal et l'intérêt garanti $\bar{r}k_t$, plus le profit résiduel.

7. La figure 1 a été tracée sur la base des valeurs : $\rho = 5$, $\gamma = 0{,}15$, $\delta = 0{,}05$ et $g = 1$ (resp. $g' = 1{,}2$) pour la courbe basse (resp. haute) en trait fin.

On peut prendre cette égalité comme une condition sur le facteur r_{t+1} de rendement du capital :

$$r_{t+1} = \rho \left(\frac{v}{\alpha} \mathrm{P}_{t+1}\right) \left(\frac{v}{\alpha} \mathrm{P}_t\right)^{\rho}, \tag{15}$$

faisant intervenir des prix en t et en $t+1$, ce qui joue un rôle important dans la dynamique du modèle. Par la condition du premier ordre (6) de maximisation du profit du producteur, on a en équilibre symétrique $\mathrm{P}_{t+1} = k_t^{-\beta} n_t/(n_t - 1)$, de sorte que l'équation précédente devient :

$$r_{t+1} = \rho \left(\frac{v}{\alpha} k_t^{-\beta} \frac{n_t}{n_t - 1}\right) \left(\frac{v}{\alpha} k_{t-1}^{-\beta} \frac{n_{t-1}}{n_{t-1} - 1}\right)^{\rho}. \tag{16}$$

La condition (16) d'équilibre sur le marché du travail, plus les deux conditions d'équilibre sur le marché du capital, correspondant à la deuxième et première étape du jeu entre entreprises nées en t, (12) et (13) respectivement, forment un système qui peut être réduit, par élimination de r_{t+1}, à deux équations de récurrence à deux variables (k_t et n_t). Une fois déterminées à partir de ce système les trajectoires de k_t et n_t – ce que nous allons étudier dans la section suivante – on peut aisément calculer les sentiers de toutes les autres variables du modèle (r_t, L_t, A_t et P_t).

Dans la section suivante, nous allons comparer notre modèle à un modèle alternatif sans investissement stratégique et donc sans l'équation (13). On peut déjà remarquer que, sans cette équation, économies d'échelle internes et externes sont confondues : le degré γ d'économies d'échelle internes cesse de jouer un rôle spécifique et seul le degré β des économies d'échelle totales, qui intervient dans l'équation (16), est pertinent [8]. Par ailleurs, les deux conditions d'équilibre sur le marché du capital et sur le marché du travail, (12) et (16), sont à elles seules insuffisantes pour assurer la détermination des trajectoires suivies par les trois variables k_t, n_t et r_t. La manière la plus courante de clore le modèle consiste à faire l'hypothèse de libre entrée et à ajouter en conséquence la condition de nullité du profit, ce qui revient ici à poser $r_t = 1$ pour tout t. C'est cette voie que nous allons exploiter dans la section suivante, pour construire le modèle de référence et mettre en lumière le rôle de l'investissement stratégique.

La dynamique

Dans notre modèle, un système dynamique à deux équations et à deux variables peut être établi à partir de (16) et (13), pour la première équation, et de (12) et (13), pour la seconde :

$$\frac{v}{\alpha} k_t^{-\beta} \frac{n_t}{n_t - 1} \frac{\rho}{\mathrm{S}(n_t)} = \left(\frac{v}{\alpha} k_{t-1}^{-\beta} \frac{n_{t-1}}{n_{t-1} - 1}\right)^{-\rho} \tag{17}$$

$$k_t n_t = k_{t-1} n_{t-1} (n_{t-1} - 1) \mathrm{S}(n_{t-1})/\rho. \tag{18}$$

Ce système a une solution stationnaire (k^*, n^*), avec n^* déterminé par l'équation (18), tel que $(n^* - 1)\mathrm{S}(n^*) = \rho$. Avec cette valeur de n^*, l'équation (17) permet ensuite de déterminer k^*. Nous allons étudier la dynamique locale par log-linéarisation du système près de cette solution stationnaire. Avant d'y procéder et pour mieux situer notre démarche, nous évoquerons toutefois la dynamique du modèle de référence sans investissement stratégique.

8. Cazzavillan, Lloyd-Braga et Pintus (1998) montrent, dans le cadre d'un modèle où l'investissement est décidé par des ménages capitalistes, qu'il est indifférent de considérer une économie en concurrence parfaite où il y a des externalités de production et une économie en concurrence imparfaite où il y a des économies d'échelles internes et libre entrée.

La dynamique sans investissement stratégique

Nous allons prendre comme modèle de référence le modèle d'une économie identique à celle que nous venons de décrire, mais sans la condition (13) qui tient compte de la dimension stratégique de l'investissement. Celui-ci est déterminé par une condition de libre entrée, couplée avec la condition de disponibilité du capital qui est toujours présente. La libre entrée entraîne ici la nullité du profit, net du coût d'investissement, c'est-à-dire $r_t = 1$ pour tout t. L'équation (15), avec $r_{t+1} = 1$, devient alors une équation dynamique autonome dans la seule variable P_t :

$$\mathrm{P}_{t+1} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\alpha}{v}\right)^{1+\rho} \mathrm{P}_t^{-\rho}. \tag{19}$$

Cette équation est log-linéaire et a une solution stationnaire $\mathrm{P}^* = \rho^{-1/(1+\rho)}(\alpha/v)$ toujours instable, puisque la dérivée $|\partial \ln \mathrm{P}_{t+1}/\partial \ln \mathrm{P}_t| = \rho > 1$. Les seules trajectoires de l'économie, qui ne sont ni explosives ni implosives, doivent préserver la stationnarité des prix en vérifiant la relation $k_t = \mathrm{P}^{*-1/\beta}(1 - 1/n_t)^{-1/\beta} \equiv \kappa(n_t)$. On voit que le capital investi par chaque entreprise est bien déterminé dans ce modèle de référence par les conditions d'équilibre sur les marchés de produits (*via* la formation des prix) et sur le marché du travail (donc par les décisions des ménages) indépendamment de toute décision spécifique des entreprises en matière d'investissement.

En remplaçant K_t dans l'équation (12) par $n_t k(n_t)$ de manière à garantir la stationnarité de P_t, on obtient une nouvelle équation dynamique en la seule variable n_t :

$$\rho(1 - 1/n_t)^{-1/\beta} n_t = (1 - 1/n_{t-1})^{1-1/\beta} n_{t-1}^2. \tag{20}$$

En calculant au point d'équilibre $n^* = 1 + \rho$ la dérivée

$$\frac{d \ln n_t}{d \ln n_{t-1}} = 1 + \frac{1 + 1/\rho}{1 - 1/\beta\rho}, \tag{21}$$

on établit que l'équilibre n^* est localement asymptotiquement stable si et seulement si $\beta < 2/(1+3\rho)$, ce qui assure que cette dérivée appartient à l'intervalle $]-1, 1[$. On retrouve bien ce résultat en procédant directement à l'étude (faite en annexe) du système dynamique (17)-(18) avec $\mathrm{S}(n_t) \equiv \mathrm{S}(n_{t-1}) \equiv 1$. Sous cette condition, qui impose un plafond au degré β d'économies d'échelle totales, la solution stationnaire de ce système est alors un *point selle*[9].

On verra que cette dynamique diffère considérablement, sur le plan des effets mis en jeu, de celle que nous allons caractériser dans le cas d'un investissement stratégique. L'effet schumpéterien mentionné dans l'introduction est en effet absent : à une croissance anticipée plus forte est ici associé un nombre plus élevé (et non plus faible) d'entreprises actives. On peut le voir en remplaçant dans la figure 1 la courbe $\mathrm{S}(n)$ par une droite horizontale correspondant à $r = 1$.

La dynamique avec investissement stratégique

Reprenons maintenant le système dynamique (17)-(18), avec $\mathrm{S}(n_t)$ défini par (13). L'équation (18) permet de déterminer le nombre d'entreprises actives par branche à la

9. Lorsqu'on augmente β et que ce paramètre franchit la valeur $2/(1 + 3\rho)$, la solution stationnaire devient instable (une source). Le système dynamique subit une bifurcation flip au point $\beta = 2/(1 + 3\rho)$. Pour cette valeur singulière de β il existe une trajectoire stationnaire en P_t et oscillante de période 2 en $(k_t, n_t) = (\kappa(n_t), n_t)$, mais de telles fluctuations auto-entretenues ne sont évidemment pas robustes, puisqu'elles disparaissent pour toute autre valeur de β.

solution stationnaire : $n^* = 2\beta\rho/(2\gamma\rho - 1)$, fonction croissante du degré β d'économies d'échelle totales et décroissante du degré γ d'économies d'échelles internes. Puisque n^* est une moyenne et qu'un équilibre de Cournot avec une demande à élasticité unitaire exige au moins deux entreprises actives, il nous faut imposer la condition $n^* \geqslant 2$. Le nombre n^* ne doit pas non plus être trop élevé sous peine de conduire à des profits négatifs (condition (10)). Enfin, $\gamma \leqslant \beta$, puisque $\delta \equiv \beta - \gamma \geqslant 0$. Nous imposons donc la restriction suivante aux valeurs admissibles des paramètres :

$$\frac{1}{2\rho} + \frac{\beta}{1+\rho} \leqslant \gamma \leqslant \min\left\{\frac{1}{2\rho} + \frac{\beta}{2}, \beta\right\}, \tag{22}$$

ce qui implique $\beta \geqslant (1+\rho)/2\rho^2$.

Par différenciation du transformé logarithmique du système, on obtient la matrice jacobienne J calculée à la solution stationnaire, dont les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{T}\lambda + \mathrm{D}$, où T et D sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice J. Sous la condition que le facteur de préférence pour le présent reste modéré ($\rho < 11{,}74$, c'est-à-dire $\alpha < 0{,}92$), on obtient toujours $\mathcal{P}(-1) > 0$ et $\mathcal{P}(1) > 0$, comme on le montre en annexe, de sorte que les valeurs propres, lorsqu'elles sont réelles, appartiennent toutes deux au même intervalle, soit $]-1, 1[$, soit $]-\infty, -1[$ ou $]1, \infty[$. La solution stationnaire est donc un *puits* dans le premier cas, si le module des deux valeurs propres est inférieur à 1, ou une *source* dans le second, si ce module est supérieur à 1. Cela reste évidemment vrai si les valeurs propres sont non réelles.

Le déterminant étant égal au produit des valeurs propres, il suffit donc de calculer celui-ci (équation (40) en annexe)

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2\gamma\rho + \beta}\left(\frac{(2\gamma\rho - 1)\rho}{1 + 2(\beta - \gamma)\rho} - 2(1 - \gamma\rho)\beta\rho\right) \tag{23}$$

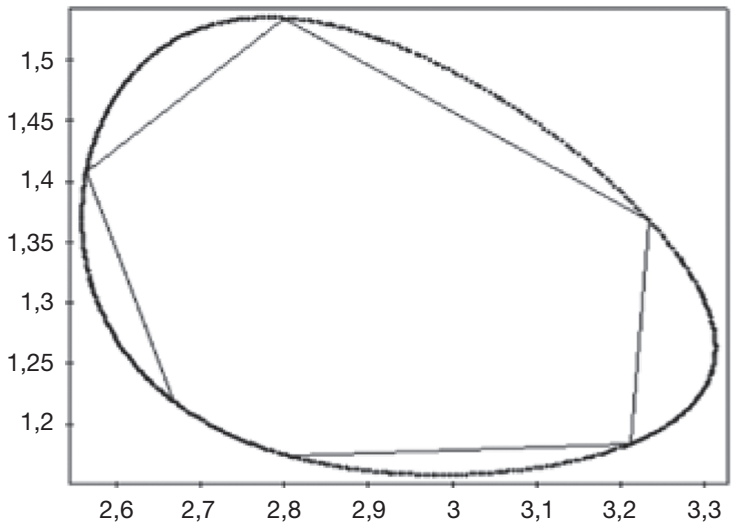
pour établir la nature de la solution stationnaire. On constate que le degré γ d'économies d'échelle *internes* joue un rôle spécifique, en présence d'un investissement stratégique, dans la détermination des propriétés dynamiques (aussi bien que de la valeur) de la solution stationnaire. On peut vérifier que le déterminant est une fonction croissante du paramètre γ, qu'il est commode de prendre comme paramètre de bifurcation. En augmentant la valeur de γ, on accroît celle du déterminant et on peut lui faire franchir le seuil de 1. La solution stationnaire perd alors sa stabilité asymptotique locale, et le système dynamique subit une *bifurcation de Hopf*. Les deux valeurs propres sont nécessairement complexes conjuguées au voisinage de cette bifurcation [10], ce qui confère une nature oscillatoire, amortie ou explosive, aux trajectoires proches de la solution stationnaire.

Avant de déterminer les conditions sur les paramètres qui assurent l'existence d'une bifurcation de Hopf, il nous faut souligner combien la survenue d'une telle bifurcation est économiquement significative. On sait, en effet, que la non-linéarité du système dynamique autorise l'apparition de fluctuations auto-entretenues robustes (ou structurellement stables), puisque non liées à une valeur précise des paramètres. L'existence de solutions périodiques est obtenue pour une plage de valeurs des paramètres au voisinage de cette bifurcation. À titre d'exemple, la figure 2 représente sur l'espace (n, k) une orbite périodique obtenue avec les valeurs des paramètres $\rho = 4$, $\beta = 0{,}5$ et $\gamma = 0{,}3$ (une valeur proche de la valeur de bifurcation $\gamma_{\mathrm{H}} = 0{,}298$) et avec la condition initiale $(k_0, n_0) = (1{,}22,\ 2{,}67)$.

10. Si les valeurs propres sont réelles, elles ont toutes deux un module soit inférieur soit supérieur à 1. Il en va donc de même du déterminant, produit des deux valeurs propres, qui ne peut donc pas être égal à 1. On peut aussi se référer au discriminant du polynôme caractéristique lorsque $\mathrm{D} = 1$, à savoir $\mathrm{T}^2 - 4 = (\mathrm{T}+2)(\mathrm{T}-2) < 0$. En effet, $\mathcal{P}(-1) = \mathrm{T} + 2 > 0$ et $\mathcal{P}(1) = 2 - \mathrm{T} > 0$.

Les cinq segments de droite relient les six premiers points $(k_0, n_0), \ldots, (k_5, n_5)$. Le point (k_5, n_5) est proche du point initial (k_0, n_0), suggérant que l'orbite résulte d'une déformation d'un cycle de période 5, tout en présentant elle-même une période très haute, puisque les points « observés » tracent presque complètement la courbe fermée sur laquelle ils se situent.

FIGURE 2 – Orbite périodique au voisinage d'une bifurcation de Hopf



Formellement, pour qu'une bifurcation de Hopf existe dans le système dynamique (17)-(18) avec $S(n_t)$ défini par (13), il faut et il suffit, si l'on prend γ comme paramètre de bifurcation, que le déterminant ait une valeur inférieure à 1 lorsque γ atteint sa borne inférieure dans la relation (22) et une valeur supérieure à 1 lorsque γ atteint sa borne supérieure dans la même relation. Ainsi, pour $\gamma = 1/2\rho + \beta/(1+\rho)$, $D < 1$ soit si $\beta \leqslant 1/2$, soit si $\beta > 1/2$ et

$$\rho < \frac{2 + \sqrt{3 + 2\beta}}{2\beta - 1} \equiv \Psi(\beta), \tag{24}$$

et, pour $\gamma = 1/2\rho + \beta/2 \leqslant \beta$, $D > 1$ si

$$\rho > \frac{2\beta - 1 + \sqrt{(2\beta-1)^2 + 4\beta^2(1+\beta)}}{2\beta^2} \equiv \Phi(\beta) \tag{25}$$

ou, pour $\gamma = \beta \leqslant 1/2\rho + \beta/2$, $D > 1$ si

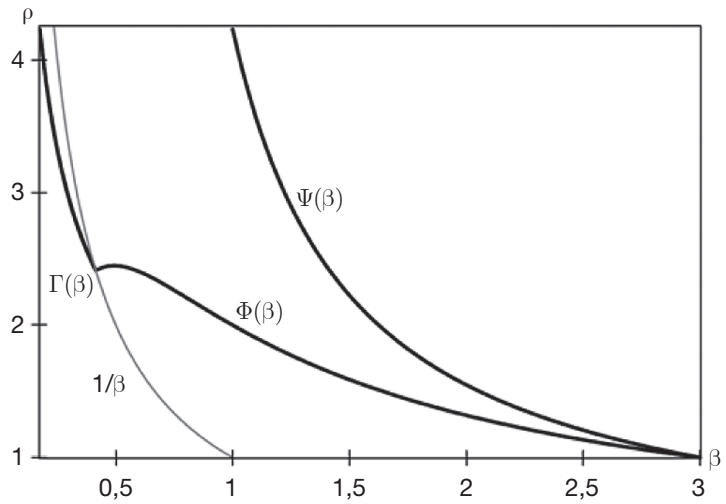
$$\rho > \frac{1 + 4\beta + \sqrt{(1+4\beta)^2 + 8\beta^2(1+\beta)}}{4\beta(1+\beta)} \equiv \Gamma(\beta). \tag{26}$$

Ces inégalités déterminent sur l'espace des paramètres (β, ρ) une région à l'intérieur de laquelle il existe une valeur admissible du paramètre γ qui conduit à une bifurcation de Hopf. Cette région est, dans la figure 3, celle qui est délimitée par les courbes épaisses.

À titre de comparaison, nous avons tracé en trait fin la valeur (précise) du paramètre β qui détermine, pour chaque valeur de ρ, une bifurcation de Hopf dans le système dynamique log-linéaire à deux dimensions correspondant à un nombre d'entreprises fixé de manière exogène et à un investissement non stratégique [11]. Pour des valeurs de ρ inférieures à $1 + \sqrt{2} \simeq 2{,}414$ (l'ordonnée du point où la courbe en trait fin traverse la frontière

11. Lorsqu'on impose une valeur constante n au nombre d'entreprises, les deux équations (12) et (16)

FIGURE 3 – Valeurs de β et ρ conduisant à l'existence d'une bifurcation de Hopf



de la région que nous venons de définir), une bifurcation de Hopf du système avec investissement stratégique est possible dans un intervalle de valeurs de β dont l'amplitude s'accroît avec ρ. Mais (en se référant à la courbe en trait fin) on voit que les économies d'échelle totales requises sont plus élevées que dans un tel système sans investissement stratégique. Par contre, pour des valeurs de ρ supérieures à $1+\sqrt{2}$, il y a bien un élargissement des possibilités d'existence d'une bifurcation, même avec un degré moindre d'économies d'échelle totales (compensé par une part plus élevée des économies d'échelle internes).

Pour comprendre l'impact de l'investissement stratégique sur la dynamique, on peut invoquer un double effet. Il y a d'abord l'effet schumpéterien, déjà mentionné, selon lequel l'accroissement du nombre d'entreprises (érodant leur pouvoir de marché) affecte négativement la croissance et l'investissement. Il y a ensuite l'effet du gain de productivité qui joue en sens opposé et par lequel une augmentation de l'investissement induit un accroissement du nombre d'entreprises.

Une manière simple de faire apparaître ce double effet est de relever que le modèle log-linéarisé contient comme cas particulier une version discrète du *modèle proie-prédateur* de Lotka et Volterra, bien connu pour les fluctuations auto-entretenues qu'il engendre. Pour aboutir à ce cas particulier, on commence par supposer un poids égal des économies d'échelle internes et externes ($\gamma = \delta = \beta/2$), dont les effets opposés vont se compenser, ce qui annule le premier élément de la matrice jacobienne du système à l'équilibre. Si on prend ensuite $\rho = 2\beta = \sqrt{6} \simeq 2{,}4495$, cette matrice devient :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Le système log-linéaire associé à J déploie un cycle invariant de quatre périodes où l'ensemble des jeunes entreprises et l'ensemble des employés de chacune d'entre elles jouent les

définissent un système dynamique log-linéaire à deux dimensions :

$$\ln k_t = (1-\beta)\ln k_{t-1} - \beta\rho \ln k_{t-2} + \text{constante}.$$

Des fluctuations auto-entretenues surviennent à la valeur de bifurcation $\beta = 1/\rho$, mais la linéarité en exclut la robustesse.

rôles des populations de prédateurs et de proies, respectivement. Un accroissement relatif $\Delta \ln k_t$ à la période t de l'emploi moyen des jeunes entreprises soutient un accroissement relatif $\Delta \ln n_{t+1} = \Delta \ln k_t$ de leur nombre dans la période suivante (effet du gain de productivité), ce qui induit un décroissement relatif de l'emploi $-\Delta \ln k_{t+2} = \Delta \ln n_{t+1}$ dans la période d'après (effet schumpéterien). Le décroissement relatif $-\Delta \ln n_{+3} = -\Delta \ln k_{t+2}$ du nombre d'entreprises qui en résulte relance l'investissement et l'emploi, et le cycle reprend :

$$\Delta \ln k_{t+4} = -\Delta \ln n_{+3} = -\Delta \ln k_{t+2} = \Delta \ln n_{t+1} = \Delta \ln k_t.$$

Conclusion

Nous avons développé un modèle simple de fluctuations endogènes déterministes. Ce modèle a permis de mettre en lumière l'impact important que peut avoir sur la dynamique économique un investissement stratégique, c'est-à-dire déterminé par les décisions interactives des entreprises. Comme il apparaît clairement dans le cas particulier où le système log-linéarisé au voisinage de la solution stationnaire prend la forme du modèle proie-prédateur, cet impact résulte d'un double effet : un effet de gain de productivité par lequel une augmentation de l'investissement affecte positivement la création d'entreprises et un effet schumpéterien par lequel la création accrue d'entreprises affecte négativement la croissance et l'investissement. Par contraste, dans un modèle de libre entrée où le nombre d'entreprises actives est déterminé par une condition de profit nul et où l'investissement est fixé de façon non stratégique par l'équilibre sur le marché du travail, la dynamique se modifie fondamentalement. L'effet schumpéterien disparaît et le nombre d'entreprises actives est alors positivement corrélé avec la croissance. Par ailleurs, les fluctuations obtenues ne sont pas robustes : elles n'apparaissent que dans une situation structurellement instable. Notre modèle illustre l'aptitude de l'investissement stratégique à générer des fluctuations auto-entretenues – des fluctuations qui sont à la fois robustes, grâce à la non-linéarité, et à même de discerner les rôles opposés des économies d'échelle internes et externes. Il reste à voir, dans la poursuite de cette étude, si la clarté de ces conclusions résiste à l'introduction d'hypothèses plus générales sur les fonctions de production ou d'utilité.

Références bibliographiques

d'Aspremont C., Dos Santos Ferreira R. et Gérard-Varet L.-A. [2010], « Strategic R&D Investment, Competitive Toughness and Growth », *International Journal of Economic Theory*, 6, p. 273-295.

d'Aspremont C. et Jacquemin A. [1988], « Cooperative and Noncooperative R&D in Duopoly with Spillovers », *American Economic Review,* 78, p. 1133-1137.

Cazzavillan G., Lloyd-Braga T. et Pintus P. [1998], « Multiple Steady States and Endogenous Fluctuations with Increasing Returns to Scale in Production », *Journal of Economic Theory*, 80, p. 60-107.

Christiano L.J., Eichenbaum M. et Evans C.L. [2005], « Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy », *Journal of Political Economy*, 113, p. 1-45.

Hahn F. et Solow R.M. [1997], *A Critical Essay on Modern Macroeconomic Theory*, Cambridge (Mass.), mit Press.

Lloyd-Braga T., Modesto L. et Seegmuller T. [2014], « Market Distortions and Local Indeterminacy: A General Approach », *Journal of Economic Theory,* 151, p. 216-247.

Smets F. et Wouters R. [2003], « An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area », *Journal of the European Economic Association*, 1, p. 1123-1175.

Annexe

Calcul de l'équilibre symétrique

En omettant les indices temporels t et $t+1$ pour alléger l'écriture, la condition du premier ordre de maximisation de $\Pi(\cdot, \mathbf{k}_{-j})$ (éq. (8)) s'écrit :

$$\frac{\partial \Pi(k_j, \mathbf{k}_{-j})}{\partial k_j} = \frac{2\mathrm{A}}{nk_j}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)z(k_j,\mathbf{k}_{-j})\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)z(k_j,\mathbf{k}_{-j}) \times \sum_{j'\neq j} z(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'})\big(\varepsilon_{k_j}c(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'}) - \varepsilon_{k_j}c(k_j,\mathbf{k}_{-j})\big) - 1 = 0, \tag{28}$$

où $\varepsilon_{k_j}c(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'})$ est l'élasticité par rapport à la variable k_j de la fonction c, au point $(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'})$, et où

$$z(k_j,\mathbf{k}_{-j}) \equiv \frac{c(k_j,\mathbf{k}_{-j})}{(1/n)\sum_{j'} c(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'})}. \tag{29}$$

Dans le cas d'un équilibre symétrique (où $z(k,\ldots,k)=1$) – le seul auquel on s'intéressera par la suite –, cette condition prend la forme (9) :

$$k = \frac{2\mathrm{A}}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)(\gamma n - \beta),$$

de sorte que $k>0$ ssi $\gamma n - \beta > 0$.

Il faut par ailleurs s'assurer que la condition du second ordre est vérifiée à l'équilibre symétrique et que le profit associé à l'investissement k est bien non négatif. Pour ce qui est du premier point, $\partial\Pi(k_j,k,\ldots,k)/\partial k_j$ est décroissante en k_j au point $(k,\ldots,k)$ si l'élasticité de son terme variable tel qu'il apparaît dans (28) y est négative. En utilisant

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_j}c(k_j,\mathbf{k}_{-j}) &= -\gamma,\ \varepsilon_{k_j}c(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'}) = -\delta/(n-1), \\ \varepsilon_{k_j}z(k_j,\mathbf{k}_{-j}) &= -\frac{1}{n}\left(\gamma - \frac{\delta}{n-1}\right)\sum_{j'\neq j} z(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'}), \\ \varepsilon_{k_j}z(k_{j'},\mathbf{k}_{-j'}) &= \frac{1}{n}\left(\gamma - \frac{\delta}{n-1}\right)z(k_j,\mathbf{k}_{-j}), \end{aligned} \tag{30}$$

avec $z(k_j,\mathbf{k}_{-j})=1$ pour tout j lorsque le profil des k_j est symétrique, on obtient la valeur suivante pour cette élasticité [12] :

$$\frac{1+(n-1)(n-2)}{n(n-1)}\big(\gamma(n-1)-\delta\big) - 1. \tag{31}$$

12. La condition du second ordre imposant la négativité de cette valeur est suffisante aussi sur le plan global. Étant donné un profil symétrique $(k,\ldots,k)$ des choix des concurrents de l'entreprise j correspondant à la condition du premier ordre, la seule solution du problème de maximisation du profit est bien $k_j = k$, du moins si cet investissement engendre un profit positif.

Cette valeur est négative sous la restriction

$$\gamma(n-1)-\delta \equiv \gamma n-\beta < \frac{n(n-1)}{1+(n-1)(n-2)}, \tag{32}$$

plus faible que la condition (10) de non-négativité des profits.

Calcul de la matrice jacobienne du système dynamique

En différenciant le transformé logarithmique du système (17)-(18) à l'équilibre stationnaire, on obtient (en dénotant $\varepsilon \mathrm{S}(n^*)$ l'élasticité de S au point n^*) :

$$\begin{bmatrix} d\ln k_t \\ d\ln n_t \end{bmatrix} = \frac{n^*-1}{1+(\varepsilon \mathrm{S}(n^*)-\beta(n^*-1))} \begin{bmatrix} 1 & 1/(n^*-1)+\varepsilon \mathrm{S}(n^*) \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta\rho & \rho/(n^*-1) \\ 1 & (2n^*-1)/(n^*-1)+\varepsilon \mathrm{S}(n^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ln k_{t-1} \\ d\ln n_{t-1} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

1) Cas où l'investissement n'est pas stratégique

Dans ce cas, $\varepsilon \mathrm{S}(n^*)=0$ et $n^*=1+\rho$. La matrice jacobienne prend alors la forme simple

$$\mathrm{J}^\circ = \frac{\rho}{1-\beta\rho} \begin{bmatrix} 1 & 1/\rho \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\rho & 1 \\ 1 & 2+1/\rho \end{bmatrix}, \tag{34}$$

qui permet de calculer aisément sa trace T° et son déterminant :

$$\mathrm{T}^\circ = -\rho - \left(\frac{(\beta(1+\rho))}{1-\beta\rho} - 1 \right) \tag{35}$$

$$\mathrm{D}^\circ = \rho \left(\frac{(\beta(1+\rho))}{1-\beta\rho} - 1 \right) = -\rho(\mathrm{T}^\circ + \rho). \tag{36}$$

2) Cas où l'investissement est stratégique

En remplaçant l'élasticité de S à la solution stationnaire $n^* = 2\beta\rho/(2\gamma\rho-1)$ par sa valeur (calculée d'après (13)),

$$\varepsilon \mathrm{S}(n^*) = \frac{\beta-\gamma n^{*2}}{(n^*-1)(\gamma n^*-\beta)}, \tag{37}$$

on obtient la matrice jacobienne

$$\mathrm{J} = -\frac{1}{2\gamma\rho+\beta} \begin{bmatrix} 1 & -2\gamma\rho \\ -1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\rho & \dfrac{(2\gamma\rho-1)\rho}{1+2(\beta-\gamma)\rho} \\ 1 & 2(1-\gamma\rho) \end{bmatrix}, \tag{38}$$

dont la trace et le déterminant sont

$$\mathrm{T} = 1 + \frac{1}{2\gamma\rho+\beta} \left(\frac{(2\gamma\rho-1)\rho}{1+2(\beta-\gamma)\rho} - (2\gamma\rho-1+\rho)\beta \right), \tag{39}$$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2\gamma\rho+\beta} \left(\frac{(2\gamma\rho-1)\rho}{1+2(\beta-\gamma)\rho} - 2(1-\gamma\rho)\beta\rho \right). \tag{40}$$

Étude du polynôme caractéristique du système dynamique

Afin de déterminer les propriétés de stabilité locale du système dynamique (17)-(18) autour de sa solution stationnaire, nous allons examiner les valeurs propres de sa matrice jacobienne en ce point dans les deux cas où l'investissement est ou n'est pas stratégique. Ces valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

1) Cas où l'investissement n'est pas stratégique

Dans ce cas, où $\mathrm{S}(n_t) = \mathrm{S}(n_{t-1}) = 1$ dans le système (17)-(18), le polynôme caractéristique est $\mathcal{P}^\circ(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{T}^\circ\lambda + \mathrm{D}^\circ$, avec la trace T° et le déterminant D° de la matrice J° donnés par (35) et (36) respectivement. On calcule les valeurs de $\mathcal{P}^\circ(\lambda)$ aux points $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\circ(-1) &= 1 + \mathrm{T}^\circ + \mathrm{D}^\circ = (1-\rho)(1+\rho+\mathrm{T}^\circ) \\ &= (\rho-1)\frac{\beta(1+3\rho)-2}{1-\beta\rho}.\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\circ(1) &= 1 - \mathrm{T}^\circ + \mathrm{D}^\circ = (1+\rho)(1-\rho-\mathrm{T}^\circ) \\ &= \frac{\beta(1+\rho)^2}{1-\beta\rho}.\end{aligned} \tag{42}$$

Si $\beta > 1/\rho > 2/(1+3\rho)$, les deux valeurs $\mathcal{P}^\circ(-1)$ et $\mathcal{P}^\circ(1)$ sont négatives, de sorte que le polynôme a deux racines réelles de module supérieur à 1, une dans l'intervalle $]-\infty, -1[$ et l'autre dans l'intervalle $]1, \infty[$. La solution stationnaire est donc instable.

Si $1/\rho > \beta > 2/(1+3\rho)$, les deux valeurs $\mathcal{P}^\circ(-1)$ et $\mathcal{P}^\circ(1)$ sont positives. Comme le déterminant D°, égal au produit des deux racines, est dans ce cas supérieur à 1, la possibilité d'avoir deux racines réelles, forcément dans l'intervalle $]-1, 1[$, est exclue. Les deux racines sont donc non réelles, de module supérieur à 1. La solution stationnaire est encore instable.

Si $\beta < 2/(1+3\rho)$, $\mathcal{P}^\circ(-1) < 0$ et $\mathcal{P}^\circ(1) > 0$, de sorte qu'il y a deux racines réelles, une dans l'intervalle $]-\infty, -1[$ et l'autre dans l'intervalle $]-1, 1[$. La solution stationnaire est donc un point selle.

2) Cas où l'investissement est stratégique

Le polynôme caractéristique $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{T}\lambda + \mathrm{D}$ du système dynamique (17)-(18), avec la trace T et le déterminant D donnés par (39) et (40) respectivement, prend les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(-1) &= 1 + \mathrm{T} + \mathrm{D} \\ &= \frac{1}{2\gamma\rho+\beta}\left[\frac{2(2\gamma\rho-1)\rho}{1+2(\beta-\gamma)\rho} + 4\gamma\rho + (2\gamma\rho-3)(\rho-1)\right],\end{aligned} \tag{43}$$

$$\mathcal{P}(1) = 1 - \mathrm{T} + \mathrm{D} = \frac{\beta(1+\rho)}{2\gamma\rho+\beta}(2\gamma\rho-1). \tag{44}$$

En utilisant la condition (22) qui impose un plancher au paramètre γ, on a $2\gamma\rho - 1 \geqslant 2\beta\rho/(1+\rho) > 0$, de sorte que $\mathcal{P}(1) > 0$. Pour ce qui est de la valeur de $\mathcal{P}(-1)$, dont le signe est celui de l'expression entre crochets dans (43), qui est croissante en γ, on voit qu'elle est positive si tel est le cas quand γ atteint son plancher, c'est-à-dire quand

$$\mathrm{H}(\beta, \rho) \equiv \frac{\rho(\rho-1)}{2}\beta^2 - \frac{\rho^2-2\rho-1}{2}\beta + 1 + \rho \tag{45}$$

est positive. Comme $\mathrm{H}(\cdot,\rho)$ est quadratique, avec un coefficient de ρ^2 positif, il suffit de montrer qu'elle n'a pas de racines réelles, c'est-à-dire que son discriminant est négatif :

$$\frac{(\rho^2-2\rho-1)^2}{4}-2\rho(\rho^2-1)<0, \tag{46}$$

ce qui est vrai pour $1{,}187<\rho<11{,}742$, comme on peut le vérifier par simulation. On a vu que la condition (22) implique que $\beta \geqslant (1+\rho)/2\rho^2 \equiv \underline{\beta}$. Or

$$\mathrm{H}(\underline{\beta},\rho)=\frac{1+\rho}{8\rho^3}\big((3\rho^2+1)(1+2\rho)+2(\rho^2-1)\big)>0 \tag{47}$$

et

$$\frac{\partial \mathrm{H}(\underline{\beta},\rho)}{\partial\beta}=\frac{1}{2\rho}\big(2\rho^2-(\rho-1)(\rho^2-1)\big)>0 \tag{48}$$

si $\rho<3{,}21$, de sorte que les racines réelles de $\mathrm{H}(\cdot,\rho)$, quand elles existent (si $\rho<1{,}187$), sont plus petites que $\underline{\beta}$. On peut donc conclure que $\mathrm{H}(\beta,\rho)>0$ pour tout $\beta \geqslant \underline{\beta}$ si $\rho<11{,}742$.

Ainsi, tant que ρ ne dépasse pas ce plafond, on obtient pour toutes valeurs admissibles des paramètres, $\mathcal{P}(-1)>0$ et $\mathcal{P}(1)>0$. Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système dynamique, si elles sont réelles, appartiennent donc toutes les deux au même intervalle, $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,\infty[$.