# Concurrence en prix et équilibres cournotiens

Claude d'Aspremont
Rodolphe Dos Santos Ferreira
Louis-André Gérard-Varet

*Contrairement à une croyance répandue, les choix stratégiques décrits dans le modèle cournotien ne sont pas restreints aux quantités. Seulement, les choix de prix sont contraints par le fait que « le prix est nécessairement le même » pour les producteurs d'un bien homogène. Les auteurs modélisent cette idée en introduisant un* schéma de prix *P associant un prix uniforme de marché aux prix affichés par les producteurs. Ils définissent ensuite un P-*équilibre *(en quantités* et *prix), associé à un tel schéma ; cet équilibre conduit au même résultat que l'équilibre de Cournot, dès lors que le schéma est suffisamment manipulable. Ils discutent également les pratiques commerciales qui peuvent sous-tendre certains de ces schémas.*

*Le concept de P-équilibre est ensuite étendu au cas de produits multiples ou différenciés, ce qui généralise à la fois les équilibres de Cournot et Chamberlin. La question du choix des quantités ou des prix comme variables stratégiques est reprise dans ce contexte. Enfin, les auteurs montrent, dans le cadre d'un modèle spatial de différenciation horizontale du produit, que le concept de P-équilibre permet, pour un choix approprié du schéma P, de répondre à la question d'existence qui guette équilibres en prix et équilibres en quantités dès que la différenciation est trop faible.*

## INTRODUCTION

S'il fallait recenser les problèmes principaux auxquels se heurte la théorie de l'oligopole, celui de l'existence de l'équilibre viendrait plus que probablement le premier à l'esprit. Il en est un autre cependant qui devrait se présenter rapidement. Il s'agit du choix des variables stratégiques et, plus particulièrement, du choix entre la concurrence en prix et la concurrence en quantités. Le plus souvent, ce choix est fait pour une raison de commodité du point de vue de l'analyse. C'est en tout cas la raison invoquée par Cournot (1838, chap. VII). Dans un modèle à un seul bien homogène, il est relativement simple d'inverser la fonction de demande et d'utiliser les quantités comme variables stratégiques. Dans un modèle à plusieurs biens différenciés, l'inversion de la demande revient à inverser tout un système d'équations, ce qui peut être évité en considérant la demande directe et en prenant les prix comme variables stratégiques. Il en est ainsi par exemple dans la presque totalité des modèles[1] de

1. Une exception est Salant [1986]. Nous y reviendrons.



*Revue économique* — N° 6, novembre 1991, p. 967-996.

concurrence spatiale, où la différenciation des produits est basée sur leur localisation, et ce dès l'origine de ces modèles (Launhardt [1885] et Hotelling [1929]).

D'un point de vue théorique, la réponse à la question du choix prix-quantités n'est claire qu'aux extrêmes. Lorsque les conditions de la concurrence parfaite sont remplies et que le concept d'équilibre walrasien est applicable, les agents ne peuvent que réagir en quantités à des prix qui s'imposent à eux : les seules variables de choix sont les quantités de biens. A l'autre extrême, dans le cas du monopole, on peut décrire la firme comme choisissant aussi bien un prix qu'une quantité, du moins dans le cas d'un bien fongible et en l'absence d'incertitudes. Pour obtenir un profit maximal, le monopole peut indifféremment fixer lui-même la quantité et accepter le prix du marché ou fixer lui-même le prix mais se laisser imposer la quantité qui solde le marché à ce prix. En revanche, lorsque la situation est véritablement oligopolistique, le choix prix-quantités devient beaucoup plus difficile et crucial dans l'analyse économique des conclusions. Il y a des raisons formelles à ce contraste théorique. Dans le cas de la concurrence parfaite, on introduit un concept d'équilibre *ad hoc* dans lequel les prix sont fixés paramétriquement. Dans le cas du monopole, on réduit le problème à un simple problème de maximisation en prix et en quantités. L'oligopole, par contre, est formalisé comme un jeu et le même concept abstrait d'équilibre stratégique peut être retenu, à savoir l'équilibre de Nash, quelles que soient les variables stratégiques envisagées. Dès lors, l'analyse conduit naturellement à considérer une certaine dualité entre les modèles en prix et les modèles en quantités : on a un même système formel qui peut être interprété différemment selon l'interprétation donnée aux stratégies. Cette dualité est d'ailleurs déjà présente chez Cournot (1838) dans son traitement du duopole (chap. VII) et du monopole complémentaire (chap. IX).

Cependant, cette dualité formelle ne résout rien d'un point de vue empirique. Là il semble *a priori* que les variables stratégiques par excellence soient les prix. Pourtant, certains contextes peuvent justifier l'emploi des quantités : lorsque les capacités de production doivent être fixées pour le long terme, alors que les prix sont rapidement ajustés pour solder le marché au moment des ventes, ce sont les quantités qui représentent les décisions stratégiques et, comme l'ont montré formellement Kreps et Scheinkman [1983], on aboutit à la solution de Cournot. De même, pour reprendre un exemple discuté par Klemperer et Meyer [1986], une entreprise de conseil (ou d'expertise) qui fixe un tarif horaire de consultation semble adopter une stratégie de prix vis-à-vis de ses concurrents. Mais si ce tarif n'est pas exactement respecté, au sens où le temps effectif de consultation par client peut, en période de demande faible, dépasser le temps comptabilisé, alors en fait l'entreprise choisit une quantité et ajuste le prix en fonction de la demande. Pour discerner empiriquement les variables stratégiques effectivement utilisées, il faut tenir compte des pratiques commerciales dans toutes leurs modalités d'application.

Notre propos ici est de montrer que la prise en compte formelle des pratiques commerciales des entreprises permet, dans une certaine mesure, de dépasser la simple dichotomie prix-quantités. Sans introduire une théorie générale dynamique de la formation des prix, nous proposerons de représenter explicitement l'influence consciente et directe qu'ont les entreprises, en dehors des conditions d'équilibre de concurrence parfaite, sur les prix de certains marchés. Cette représentation formelle (et statique) d'un mécanisme de formation des prix inclura dans ses applications certaines pratiques commerciales observées. Elle fera apparaître également que la solution de Cournot ne doit pas être interprétée strictement comme un équilibre en quantités. Ces mécanismes de formation des prix (que nous appellerons « schémas de prix ») jouent de fait le rôle de mécanismes de coordination stratégique entre les entreprises. Certains mécanismes de ce type, tels que pratiqués aux États-Unis, ont d'ailleurs fait l'objet de poursuites comme étant des accords collusifs contraires à la législation anti-trust. L'introduction des schémas de prix fera l'objet de la section 2.

Dans la section 3, nous verrons comment, en utilisant les schémas de prix, on peut envisager différentes généralisations du concept d'équilibre de Cournot. Un des concepts proposés représentera en même temps une généralisation du concept d'équilibre (en prix) de concurrence monopolistique, évitant l'inversion d'un système complet de demande.

Enfin, dans la dernière section, nous remettrons en cause, à la lumière des analyses précédentes la portée d'une dualité prix-quantité dans les modèles d'oligopole et de la vision dichotomique du comportement des entreprises qui en découle. L'examen des pratiques commerciales des entreprises révèle plutôt un comportement stratégique combinant à la fois décisions de prix et décisions de quantités, et impliquant différentes formes de coordination. Une de ces formes de coordination est donnée par les limites imposées aux stratégies de remises de prix ayant pour but d'éliminer les concurrents du marché. La prévention ainsi obtenue d'une « guerre des prix » permet d'éviter la non-existence d'un équilibre. Un exemple (inspiré à la fois par Launhardt et Hotelling) est développé où un tel problème d'existence est posé et où, en passant de la concurrence monopolistique habituelle (en prix) à une concurrence cournotienne (utilisant les schémas de prix), le problème est résolu.

## SCHÉMAS DE PRIX ET ÉQUILIBRE DE COURNOT

Ainsi notre premier objectif est de montrer que la théorie de l'oligopole développée par Cournot [1838] dans son chapitre VII ne doit pas nécessairement être interprétée comme impliquant que les producteurs raisonnent simplement en termes de choix de quantités.

## Le modèle de Cournot

Considérons le marché d'un bien non différencié vendu par un nombre fixé $n$ de producteurs à un grand nombre de consommateurs. Le comportement des consommateurs est représenté par une fonction de demande D, associant à tout prix unitaire (dans l'intervalle $[0, \infty]$) la quantité totale Q demandée du bien (définie dans le même intervalle). Chaque producteur $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) peut offrir une quantité $q_i \geq 0$ pour un coût total $C_i(q_i)$ et annoncer son prix $\psi_i \geq 0$. Ce faisant, il doit tenir compte des décisions en prix et en quantité des autres producteurs.

Cournot, prenant l'exemple de deux producteurs, propriétaires chacun d'une source d'eau de qualité identique, introduit tout d'abord l'idée que « le prix est nécessairement le même pour l'un et l'autre », ce qui l'amène à utiliser la fonction de demande inverse, à savoir la fonction (que nous dénoterons) $\Delta$ telle que :

$$p = \Delta(\mathrm{Q}) \text{ si et seulement si } \mathrm{Q} = \mathrm{D}(p).$$

Il ne faut pas en conclure que Cournot rejette la possibilité pour chaque propriétaire de mener une politique de prix :

> Le propriétaire (1) ne peut pas influer directement sur la fixation de $q_2$ [notre notation], tout ce qu'il peut faire, c'est lorsque $q_2$ est fixé par le propriétaire (2) de choisir pour $q_1$ la valeur qui lui convient le mieux, *ce à quoi il parviendra en modifiant convenablement le prix* (nous soulignons).

Ainsi dans l'approche de Cournot, il y a ajustement en prix des producteurs mais ces ajustements en prix sont coordonnés par l'intermédiaire de la fonction de demande inverse. De ce fait, « analytiquement » (comme le dit Cournot) le problème se réduit à un simple ajustement des quantités, finalement exprimé (en imposant les conditions de différentiabilité et de convexité requises) par les conditions de premier ordre du problème de maximisation du profit de chaque producteur. Dans notre notation, les quantités des producteurs $\{q_i^c\}$ et le « prix du marché » $p^c$ à la solution de Cournot doivent satisfaire les conditions bien connues :

$$\frac{p^c - \mathrm{C}'_i(q_i^c)}{p^c} = \frac{q_i^c}{\sum_{j=1}^{n} q_j^c}\left(\frac{1}{\eta(p^c)}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

où $\eta(p) = -\frac{p}{\mathrm{D}(p)} \cdot \mathrm{D}'(p)$ désigne l'élasticité en prix de la demande.

## Les schémas de prix

La fonction de demande inverse chez Cournot joue en quelque sorte un double rôle : celui de synthétiser le comportement des consommateurs, permettant ainsi d'obtenir à la solution l'égalité de l'offre et de la demande, et celui de synthétiser la formation des prix des producteurs, qui à la solution sont nécessairement égaux. On peut, pour mieux faire ressortir ce double rôle, introduire une fonction séparée d'ajustement des prix — ou *schéma de prix*[1] — à savoir une fonction P associant au vecteur des prix annoncés $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ le prix résultant sur le marché : $p = \mathrm{P}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$. Dès lors, au lieu de réduire le jeu à un jeu en quantités on peut garder les deux variables de décision pour chaque producteur $i$, $q_i$ et $\psi_i$, lorsqu'il anticipe le choix des autres producteurs,

$$q_{-i} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n) \text{ et } \psi_{-i} = (\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \ldots, \psi_n).$$

Le producteur $i$ va dès lors maximiser son profit (à schéma de prix P $(\cdot)$ donné)

$$\Pi_i (q_i, q_{-i}, \psi_i, \psi_{-i}) = q_i \mathrm{P}(\psi_i, \psi_{-i}) - \mathrm{C}_i(q_i)$$

sous la contrainte de « demande résiduelle »

$$q_i \leq \mathrm{D}(\mathrm{P}(\psi_i, \psi_{-i})) - \mathrm{Q}_{-i}$$

où $\mathrm{Q}_{-i}$ est la somme des quantités produites par les autres producteurs $\Sigma_{j \neq i}\, q_j$.

On définit un *P-équilibre* comme le vecteur $(q^*, \psi^*)$ tel que chaque $(q_i^*, \psi_i^*)$ maximise le profit du producteur $i$ sous sa contrainte de demande résiduelle pour $(q_{-i}, \psi_{-i}) = (q_{-i}^*, \psi_{-i}^*)$ et tel que $\mathrm{Q}^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^* = \mathrm{D}(\mathrm{P}(\psi^*))$.

Une propriété[2] faible qu'on peut imposer à P est que pour tout $p$ dans $[0, \infty]$, il existe $\psi$ tel que $\mathrm{P}(\psi) = p$. Remarquons simplement ici que si nous supposons en outre que P est différentiable et strictement croissant en $\psi_i$ (pour chaque $i$) et si nous acceptons les hypothèses de Cournot (essentiellement la différentiabilité et la quasi-concavité stricte de la fonction $[q_i \Delta(q_i + \mathrm{Q}_{-i}) - \mathrm{C}_i(q_i)]$ en $q_i$), P-équilibre et solution de Cournot coïncident. En effet, écrivant pour chaque $i$ les conditions du premier ordre pour que $(q_i^*, \psi_i^*)$ maximise $[q_i \mathrm{P}(\psi_i, \psi_{-i}^*) - \mathrm{C}_i(q_i)]$ sous la contrainte $q_i \leq \mathrm{D}(\mathrm{P}(\psi_i, \psi_{-i}^*)) - \mathrm{Q}_{-i}^*$, on dérive facilement les conditions équivalentes :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \psi_i}[q_i^* + (\mathrm{P}(\psi^*) - \mathrm{C}_i'(q_i^*)) \cdot \mathrm{D}'(\mathrm{P}(\psi^*))] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ou

$$\frac{\mathrm{P}(\psi^*) - \mathrm{C}_i'(q_i^*)}{\mathrm{P}(\psi^*)} = \frac{q_i^*}{\mathrm{Q}^*}\left(\frac{1}{\eta(\mathrm{P}(\psi^*))}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1. Voir d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet [1991].
2. Pour une discussion d'autres propriétés de P, voir notre article cité [1991].

On obtient donc les mêmes conditions caractérisant la solution de Cournot en ce qui concerne les quantités ($q_i^* = q_i^c$) et le prix du marché ($P(\psi^*) = p^c$). La valeur de $\psi^*$ dépendra de la définition exacte de P.

La propriété essentielle pour ce résultat est la manipulabilité (vers le haut comme vers le bas) du prix du marché par chaque producteur individuel. Avec cette propriété, d'une certaine façon, le schéma de prix peut être oblitéré : l'équilibre peut se définir simplement comme un prix $p^*$ et un vecteur de quantités $q^*$ tels que chaque producteur en choisissant ($p^*$, $q_i^*$) choisit sa solution de monopole face à la demande résiduelle $[D(p) - Q_{-i}^*]$. Sous cette contrainte, chaque producteur maximise donc son profit $pq_i - C_i(q_i)$ en prix et en quantité, sa quantité choisie étant finalement celle de la solution de Cournot et le prix choisi par chacun étant le même, celui qui solde le marché.

## Les pratiques commerciales

Cependant, les schémas de prix n'ont pas forcément une propriété de manipulabilité aussi forte. Ils apparaissent comme une représentation abstraite et statique d'un mécanisme dynamique d'ajustement des prix, comme le sont par exemple les procédures d'enchères ou d'adjudication. Autrement dit, les schémas de prix permettent de formaliser de façon simplifiée certaines des pratiques conventionnelles de coordination dans la fixation ou la formation des prix qui peuvent être observées dans différentes industries. Rien ne dit que ces pratiques autorisent une telle manipulabilité par chaque producteur.

Un certain nombre de travaux théoriques récents[1] en économie industrielle portant sur certaines pratiques de coordination des prix ont été suscités par des attaques de la Federal Trade Commission contre l'utilisation courante de telles pratiques dans quelques industries (comme étant contraire au droit de la concurrence). Le cas le plus discuté[2] a été celui de Ethyl et Du Pont de Nemours (au début des années 1980) mais leur condamnation a été rejetée en appel en 1984. Ces pratiques ont donc toujours cours. En exemple, on peut citer les pratiques commerciales suivantes :

— annonces préalables publiques des changements de prix avec possibilité pour chaque producteur d'annuler le changement s'il n'est pas suivi ;

— « clause du client le plus favorisé » selon laquelle dans le contrat de vente chaque consommateur est assuré de ne pas payer un prix plus élevé qu'un autre consommateur ;

— garantie du meilleur prix vis-à-vis de la concurrence ou « clause du plus offrant » selon laquelle chaque consommateur peut exiger du producteur le prix le plus bas sur le marché sinon rompre le contrat de vente ;

1. Par exemple : Salop [1985], Kalai et Satterthwaite [1986], Cooper [1986], Holt et Scheffman [1987], Doyle [1988], Logan et Lutter [1989].

2. Par exemple : Grether et Plott [1984], Salop [1985], Kalai et Satterthwaite [1986].

— prix franco (ou prix rendu) garantissant un même prix à tout consommateur quelle que soit sa localisation.

Salop [1985] ainsi que Cooper [1986] montrent comment ce type de pratiques permet aux producteurs de coordonner leur politique de prix de façon plus crédible que par simple collusion tacite. Bien que ces pratiques puissent être collectivement désavantageuses pour les consommateurs, ceux-ci sont amenés à les accepter sur une base de rationalité individuelle. Ainsi, par exemple, un consommateur peut accepter la clause du client le plus favorisé pour se prémunir contre l'éventualité d'une réduction du prix (faite à d'autres clients) dont il ne pourrait bénéficier. La plupart des autres travaux[1] concernant ces pratiques de coordination démontrent, sous certaines conditions de symétrie, qu'elles permettent d'atteindre de façon non coopérative et crédible la solution collusive (de maximisation du profit total de l'industrie). Le point de départ de ces analyses est de supposer que ces pratiques conventionnelles impliquent que le prix du marché soit déterminé comme le minimum des prix annoncés par les différents producteurs, soit $P^{min}(\psi) = \min_j \psi_j$. La clause garantissant le meilleur prix implique que chaque producteur soit informé des réductions de prix de ses concurrents et donc lui donne la possibilité de suivre. L'annonce des changements de prix préalables à leur entrée en vigueur permet aux producteurs de se coordonner sur une hausse du prix. La clause du client le plus favorisé et l'utilisation de prix franco enfin impliquent une tarification uniforme pour tous les consommateurs. L'effet de la règle de prix $P^{min}$ est que chaque producteur fait face à une demande résiduelle « coudée » (à la Sweezy [1939]) et il y a de ce fait un grand nombre d'équilibres non coopératifs dominés (dans le cas symétrique) pour tous les producteurs par celui correspondant au prix de monopole.

Si on analyse le schéma de prix $P^{min}$ dans notre modèle[2], on retrouve la propriété de demande coudée et la multiplicité des équilibres, mais dans le cas symétrique l'équilibre non coopératif qui domine tous les autres correspond à la solution de Cournot. Il y a donc une divergence des conclusions, qui vient de ce que nous ne considérons pas le jeu en prix uniquement, mais supposons que chaque producteur tient compte des parts de marché des autres producteurs. Holt et Scheffman [1987] obtiennent des conclusions analogues à celles obtenues dans notre modèle en introduisant en plus des clauses de meilleur prix garanti et de client le plus favorisé, la possibilité pour les producteurs d'offrir aux consommateurs des remises ou rabais dans un deuxième temps, de façon non discriminatoire. Ils supposent[3] qu'une offre de remise faite par un producteur lui permet d'obtenir toutes les ventes additionnelles engendrées par la remise, mais que les autres producteurs, obligés de suivre l'offre de remise (selon les clauses), ne perdront aucun acheteur. Sous cette hypothèse, ils démontrent que, dans le cas symétrique, tous les prix inférieurs ou égaux au prix de Cournot

1. Voir, par exemple, Kalai et Satterthwaite [1986], Doyle [1988], et Logan et Lutter [1989].

2. Voir d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet [1991].

3. Voir l'hypothèse 3 de Holt et Scheffman [1987], p. 190.

peuvent être réalisés comme un équilibre parfait pour les sous-jeux[1]. Dans notre modèle, nous obtenons un résultat analogue, à ceci près que l'exigence de solder le marché ($Q^* = D(P(\psi^*))$) élimine comme composantes d'un P-équilibre tous les prix inférieurs au coût marginal (qui est le même pour tous les producteurs dans le cas symétrique).

Les pratiques de coordination des prix que nous avons introduites pour illustrer la notion de schéma de prix (en particulier le schéma $P^{min}$) sont loin d'épuiser l'ensemble des pratiques de ce genre. En fait, l'économie industrielle a relevé, depuis Stigler [1947] et Markham [1951], l'introduction d'un « leadership en prix » comme alternative à un accord explicite de coopération. Un premier modèle — dit de la *firme dominante* — vise à rendre compte du cas d'industries où opère une firme importante (représentant typiquement 80 % du total du produit de l'industrie) en même temps qu'un grand nombre de petites firmes dont aucune n'est en mesure d'affecter le prix. Les petites firmes — la frange concurrentielle — agissant à prix donné, seule la grosse firme — la firme dominante — a pouvoir pour fixer le prix, ce qu'elle fait en agissant comme monopoleur sur sa demande résiduelle, c'est-à-dire en fixant un prix qui maximise son profit de sorte qu'à ce prix les firmes de la frange concurrentielle écoulent ce qu'elles souhaitent, tout en couvrant le reste de la quantité demandée. Cela peut correspondre à un schéma de prix où le prix du marché coïnciderait avec le prix de la firme dominante.

En dépit de l'importance que Stigler [1947] a pu lui attribuer, il est douteux que le modèle de la firme dominante convienne pour l'analyse de marchés comptant plusieurs « grandes » firmes. On ne voit pas pourquoi toutes les grandes firmes sauf une accepteraient d'abandonner leur pouvoir de marché pour être rangées dans la frange concurrentielle. A l'inverse si toutes les grandes firmes sont actives le modèle de la firme dominante coïncide, dans le cas d'un bien homogène, avec l'équilibre de Cournot. Bain [1960] s'est appuyé sur cette observation pour proposer une notion de « leadership oligopolistique en prix » reprise récemment par Deneckere-Kovenock [1988] dans un cadre similaire à celui proposé par Levitan-Shubik [1972] et Kreps-Scheinkman [1983]. On considère un duopole où les participants, de coûts variables identiques, mais ayant des capacités différentes, peuvent choisir d'agir en premier ou en second dans le jeu de fixation du prix[2]. Une firme de petite taille (c'est-à-dire de capacité faible) va, toutes choses égales par ailleurs, perdre plus que la firme de grande taille (capacité forte) à une « guerre de prix » : il est de son intérêt d'être suiveur. Aussi la capacité déterminant le leadership et l'équilibre, qui est une solution de Stackelberg du jeu en prix à capacités données, traduit une collusion, la grande firme qui est leader se garantit le même profit que dans un jeu simultané alors que le profit de la petite firme est augmenté en agissant comme suiveur.

1. Voir la proposition 2 de Holt et Scheffman [1987], p. 192.
2. On se situe dans des domaines de valeurs des capacités où il n'existe pas d'équilibre (en stratégies pures) du jeu simultané prix-quantités.

Le second modèle de « leadership en prix » peut être assimilé au schéma $P^{min}$ (est « leader » celui qui choisit délibérément le prix le plus bas, et « follower » celui qui est forcé de le prendre comme une donnée) et au jeu en prix avec « demande coudée » à la Sweezy. Les analyses récentes qui ont été mentionnées plus haut[1] peuvent être appliquées à ce modèle. Le troisième modèle, dit de la « firme barométrique », où le leader a pour seul rôle de rendre public le prix du marché, ne permet pas de caractériser un schéma de prix particulier. Dans l'application de ce modèle, toutefois, il a été noté, qu'en pratique le rôle de « leader » est souvent assumé par des firmes de petite taille (un résultat que l'on retrouve dans le second modèle : voir l'exemple du duopole dans d'Aspremont et al. [1991]).

En conclusion, il faut mentionner que les schémas de prix, comme normes abstraites de comportement des producteurs, de même que les pratiques ou clauses de coordination, comme normes concrètes, peuvent parfois être associés à des solutions limites dans des jeux dynamiques appropriés[2]. On ne retrouve cependant pas vraiment de théorie dynamique de la formation des prix en concurrence imparfaite. Une telle théorie semble difficile à développer dès lors que n'existe pas encore, et la suite en donne l'illustration, de consensus quant à une théorie générale statique.

## ÉQUILIBRES COURNOTIENS ET INTERDÉPENDANCE DES MARCHÉS

Lorsqu'on introduit plusieurs secteurs productifs dans le modèle, avec un bien différencié mais plusieurs producteurs par secteur, il y a *a priori* plusieurs façons de généraliser l'approche de Cournot.

### L'équilibre de Cournot-Walras

Une première façon de faire consiste à considérer la demande comme une fonction vectorielle — associant au vecteur des prix de tous les biens différenciés le vecteur des quantités désirées par les consommateurs — et à inverser le système ainsi décrit pour obtenir les prix comme une fonction vectorielle des quantités. De cette façon, on peut, à l'instar de Cournot, réduire analytiquement la situation oligopolistique à un jeu en quantités. Formellement, supposons K biens différenciés, et une fonction de demande

$$D(p) = (D_1(p), \ldots, D_k(p), \ldots, (D_K(p))$$

1. Comme Kalai et Satterthwaite [1986], Holt et Scheffman [1987], d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet [1991].

2. On peut ainsi associer les résultats de Kalai et Satterthwaite [1986] à ceux de Kalai et Stanford [1985] ou Anderson [1983].

avec $p = (p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_K)$ et, pour tout $k$, le prix du bien $k$, $p_k \geq 0$, et la quantité demandée du bien $k$, $D_k(p) \geq 0$. L'ensemble des $n$ producteurs peut être partitionné en K groupes, chaque groupe $N_k$ dénotant le sous-ensemble des producteurs du bien $k$. Chaque producteur $i$ de $N_k$ peut offrir une quantité $q_i \geq 0$ du bien $k$ à un coût $C_i(q_i)$. Supposant pour chaque bien $k$ que le prix est « nécessairement le même » (et égal à $p_k$) pour tous les producteurs du bien $k$, on doit faire l'hypothèse forte que le système de demande peut être inversé : il existe une fonction $\Delta_k$ telle que $p_k = \Delta_k(Q_1, \ldots, Q_k, \ldots, Q_K)$ si et seulement si $Q_k = D_k(p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_K)$ pour $k = 1, 2, \ldots, K$, ou, en notation vectorielle,

$$p = \Delta(Q) \text{ si et seulement si } Q = D(p).$$

Le système inverse ainsi obtenu, on peut définir ce que, dans un modèle d'équilibre général, Gabszewicz et Vial [1972] ont appelé un équilibre de Cournot-Walras, à savoir un vecteur $q^0$ de quantités telles que, pour chaque producteur $i$ de $N_k$, $q_i^0$ maximise son profit

$$q_i \, \Delta_k \left( \sum_{j \in N_1} q_j^0, \ \ldots, \ q_i + \sum_{j \in N_k - \{i\}} q_j^0, \ \ldots, \ \sum_{j \in N_K} q_j^0 \right) - C_i(q_i).$$

Prenons, par exemple, le cas d'un système linéaire de demande, soit

$$D_k(p) = \max \left( 0, \ a_k - \sum_{h=1}^{K} b_{kh} p_h \right),$$

pour $a_k > 0$, $b_{kh} \in (-\infty, \infty)$ et $k, h = 1, 2, \ldots, K$. En notant $a$ le vecteur colonne $(a_k)_k$ et B la matrice $[b_{kh}]$ de dimension $K \times K$, le système soldant tous les marchés peut s'écrire :

$$Q = (a - Bp)$$

où chaque $Q_k = \sum_{i \in N_K} q_i$. Sous l'hypothèse que la matrice B est régulière, avec pour matrice inverse la matrice $B^{-1} = [\beta_{kh}]$, il est possible d'inverser le système et d'obtenir :

$$p = B^{-1}(a - Q).$$

Supposant en outre un coût marginal constant $c_k > 0$ pour chaque producteur de bien $k$, et notant $c$ le vecteur colonne $(c_k)_k$ le producteur $i$ de $N_k$ doit résoudre le programme,

$$\max_{q_i \geq 0} \ q_i e_k B^{-1}(a - Q) - c_k q_i,$$

avec $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où 1 est la $k$ème composante. Les conditions de premier ordre peuvent s'écrire :

$$e_k B^{-1}(a - Q) - c_k - \beta_{kk} q_i = 0,$$

pour tout $k$ et tout $i$ dans $N_k$. En outre, par symétrie, l'équilibre de Cournot-Walras $q^0$ doit satisfaire les égalités : pour tout $i, j$ dans $N_k$

$$q_i^0 = q_j^0 = \frac{Q_k^0}{n_k}, \text{ avec } n_k = | N_k | .$$

Cela permet, en introduisant les matrices diagonales

$$[\beta_{kk}] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{KK} \end{bmatrix} \text{ et } [n_k] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n_K \end{bmatrix}$$

de réécrire les conditions de premier ordre en notation matricielle :

$$B^{-1} (a - Q^0) - c - [\beta_{kk}] [n_k]^{-1} Q^0 = 0.$$

Finalement l'équilibre de Cournot-Walras est donné par l'expression :

$$Q^0 = (B^{-1} + [\beta_{kk}] [n_k]^{-1})^{-1} (B^{-1} a - c).$$

La difficulté fondamentale de l'équilibre de Cournot-Walras est bien connue[1]. Elle est liée à l'inversion du système général de demande. En effet, non seulement l'existence d'un système inverse de demande est en soi une hypothèse restrictive (qui en équilibre général est équivalente à l'existence d'un équilibre walrasien unique associé à chaque configuration des choix des producteurs) mais des hypothèses supplémentaires, difficiles à interpréter, sont requises pour obtenir un équilibre du jeu en quantités (comme la quasi-concavité en quantité des fonctions de profit des producteurs). En outre, imposer à chaque producteur d'intégrer dans son objectif de maximisation du profit le calcul des prix qui soldent l'ensemble de tous les marchés, est une exigence très forte de rationalité. Ainsi que ce soit du point de vue de la formalisation ou du point de vue de l'interprétation, l'inversion du système général de demande est exorbitante.

## L'équilibre cournotien de concurrence monopolistique

On peut, en utilisant la notion de schéma de prix introduite dans la section précédente, proposer une autre généralisation de l'approche de Cournot, qui soit plus raisonnable du point de vue des producteurs. Considérons que dans chaque secteur $k$ soit défini un schéma de prix $P_k$, associant au vecteur des prix

1. Pour une évaluation récente, voir Gary-Bobo [1990].

$(\psi_i)_{i \in N_k}$ annoncés par les producteurs du secteur le « prix du marché » du bien $k$, $p_k = P_k((\psi_i)_{i \in N_k})$. Soient

$$\psi^k = (\psi_j)_{j \in N_k},$$

$$\psi^k_{-i} = (\psi_j)_{j \in N_k - \{i\}},$$

$$q^k_{-i} = (q_j)_{j \in N_k - \{i\}},$$

$$Q_k = \sum_{j \in N_k} q_j,$$

$$Q^k_{-i} = \sum_{j \in N_k - \{i\}} q_j,$$

et $P(\psi) = (P_1(\psi^1), \ldots, P_k(\psi^k), \ldots, P_K(\psi^K))$.

La définition de la section précédente est naturellement étendue au cas multisectoriel. Un P-*équilibre* est un vecteur $(q^*, \psi^*)$ tel que pour tout $k$, $Q^*_k = D_k(P(\psi^*))$ et pour tout $i$ dans $N_k$, $(q^*_i, \psi^*_i)$ est solution du programme :

$$\max_{(q_i, \psi_i)} \; q_i \, P_k(\psi_i, \psi^{*k}_{-i}) - C_i(q_i), \qquad q_i \geq 0, \; \psi_i \geq 0,$$

sous la contrainte de demande résiduelle :

$$q_i \leq D_k(P(\psi_i, \psi^*_{-i})) - Q^{*k}_{-i}.$$

Comme précédemment, un cas particulièrement intéressant est celui dans lequel chaque schéma de prix $P_k$ permet d'atteindre n'importe quel prix $p_k \geq 0$ ($P_k(\psi^k) = p_k$ pour au moins un $\psi^k$), et est strictement croissant dans chaque variable $\psi_i$, $i \in N_k$. Dans ce cas, les schémas de prix ne jouent plus un rôle explicite. Un P-équilibre est simplement un vecteur de prix $p^*$ (un prix par marché) et un vecteur de quantité $q^*$ (une par producteur) tels que chaque producteur $i \in N_k$, en choisissant le prix $p^*_k$ et la quantité $q^*_i$ choisit sa solution de monopole face à la demande résiduelle $[D_k(p_k, p^*_{-k}) - Q^{*k}_{-i}]$ calculée en prenant les prix des autres secteurs comme une donnée. Remarquons que ce concept d'équilibre généralise à la fois la solution de Cournot — lorsqu'il n'y a qu'un seul secteur, on retrouve le résultat de la section précédente — et le concept d'équilibre de concurrence monopolistique à la Chamberlin [1933] — lorsqu'il n'y a qu'un seul producteur par secteur. C'est pourquoi nous parlerons alors *d'équilibre cournotien de concurrence monopolistique*.

Cet équilibre peut être facilement calculé dans l'exemple avec système linéaire de demande et coûts marginaux constants. Dans cet exemple, le programme de chaque producteur $i$ dans $N_k$ peut s'écrire à $p^*_{-k}$ et $Q^{*k}_{-i}$ donnés :

$$\max_{p_k} \; (p_k - c_k)\,(a_k - b_{kk}\,p_k - \sum_{h \neq k} b_{kh}\,p^*_h - Q^{*k}_{-i}),$$

ou encore, de manière équivalente,

$$\max_{q_i} \frac{1}{b_{kk}}\left(a_k - q_i - Q^{*k}_{-i} - \sum_{h \neq k} b_{kh}\, p^*_h\right) q_i - c_k\, q_i.$$

Utilisant à nouveau la symétrie, on obtient les conditions de premier ordre,

$$\frac{1}{b_{kk}}\left(a_k - Q^*_k - \sum_{h \neq k} b_{kh}\, p^*_h\right) - c_k - \frac{1}{b_{kk}}\frac{Q^*_k}{n_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, K.$$

En utilisant la matrice diagonale,

$$[b_{kk}] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_{KK} \end{bmatrix}$$

ces conditions peuvent être réécrites en notation matricielle :

$$a - Q^* - (B - [b_{kk}])p^* - [b_{kk}]c - [n_k]^{-1}\, Q^* = 0.$$

Comme $p^* = B^{-1}\,(a - Q^*)$, on en tire

$$(I - (B - [b_{kk}])B^{-1})\,(a - Q^*) - [b_{kk}]c - [n_k]^{-1}\, Q^* = 0$$

et, après simplification,

$$B^{-1}\,(a - Q^*) - c - [b_{kk}]^{-1}\,[n_k]^{-1}\, Q^* = 0.$$

En conséquence, l'équilibre cournotien de concurrence monopolistique est donné par :

$$Q^* = (B^{-1} + [b_{kk}]^{-1}\,[n_k]^{-1})^{-1}\,(B^{-1}\,a - c).$$

Par comparaison avec l'expression correspondante $Q^0$ donnée pour l'équilibre de Cournot-Walras, on voit la simplification obtenue : la matrice $[\beta_{kk}]$, calculée en prenant les éléments de la diagonale de $B^{-1}$, est remplacée par la matrice inverse $[b_{kk}]^{-1}$ simplement calculée en prenant l'inverse des éléments diagonaux de B.

Pour terminer cet exemple, remarquons qu'en laissant tendre chaque $n_k$ vers l'infini, à la fois $Q^*$ et $Q^0$ tendent vers la solution walrasienne :

$$Q^w = a - Bc$$

correspondant aux prix walrasiens $p^w = c$.

## Un théorème d'existence

Une observation triviale concernant l'existence d'un P-équilibre résulte du fait qu'on peut prendre pour schémas de prix des schémas de prix rigides. Alors si on fixe $P(\cdot) \equiv p^w$, le système de prix d'équilibre walrasien, l'existence est assurée par les mêmes hypothèses que celles qui assurent l'existence d'un équilibre walrasien.

Le problème de l'existence d'un P-équilibre se complique si on fixe les schémas de prix ou tout au moins la classe des schémas de prix considérés. En particulier, si on se limite aux schémas de prix $P_k$ qui soient strictement croissants dans chacun de leurs arguments et qui permettent d'atteindre n'importe quel prix $p_k \geq 0$, alors démontrer l'existence d'un P-équilibre donne l'existence d'un équilibre cournotien de concurrence monopolistique.

**Proposition.** *Un équilibre cournotien de concurrence monopolistique existe sous les hypothèses suivantes :*

(a) *Pour tout* k *et tout* i, $D_k$ *et* $C_i$ *sont deux fois continûment différentiables et* $\dfrac{\partial D_k}{\partial p_k} < 0$, $C_i' \geq 0$.

(b) *Pour* $p_0 > 0$ *et pour tout* $p_{-k}$ *tel que* $0 \leq p_h \leq p_0$, *où* $h, k = 1, \ldots, K$, $h \neq k$, *il existe dans chaque secteur k une solution non triviale de Cournot* $(q_i^c)_{i \in N_k}$ *telle que le prix* $p_k^c$ *satisfaisant* $D(p_k^c, p_{-k}^c) = \sum_{i \in N_k} q_i^c$ *vérifie* $0 < p_k^c \leq p_0$ $(k = 1, \ldots, K)$.

(c) *Pour tout k et* $h \neq k$, $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial p_k} > 0$ *et* $\dfrac{\partial \eta_k}{\partial p_h} < 0$, *pout tout p tel que* $D_k(p) > 0$,

(d) *Pour tout k et* $h \neq$ k, *soit* $\dfrac{\partial D_k}{\partial p_h} \geq 0$ *et* $C_i'' \geq 0$ *pour tout* $i \in N_k$, *soit* $C_i'' \equiv 0$ *pour tout* $i \in N_k$.

*Preuve.* Considérons la sélection des solutions de Cournot donnée par l'hypothèse (b). L'équilibre cournotien de concurrence monopolistique doit satisfaire les conditions de premier ordre.

$$\eta_k(p_k^c, p_{-k}) = \frac{q_i^c/Q_k^c}{[1 - C_i'/p_k^c]}, \quad i \in N_k, p_{-k} \in [0, p_0]^{K-1}.$$

Soit $p_k^c(p_{-k})$ le prix de la solution de Cournot sélectionnée en $p_{-k}$. On peut montrer que si $p_{-k}^0$ et $p_{-k}^1$ non identiques sont tels que $p_h^0 \leq p_h^1$ pour tout $h \neq k$, alors on doit avoir $p_k^c(p_{-k}^0) < p_k^c(p_{-k}^1)$. Supposons le contraire. Alors, par (c) :

$$\eta_k(p_k^c(p_{-k}^0), p_{-k}^0) > \eta_k(p_k^c(p_{-k}^1), p_{-k}^1).$$

Si en outre $C_i'' \equiv 0$ pour tout $i$, on obtient :

$$1 - \frac{C_i'}{p_k^c\,(p_{-k}^0)} \geq 1 - \frac{C_i'}{p_k^c\,(p_{-k}^1)}, \text{ pour tout } i \in N_k,$$

ce qui donne une contradiction car, pour au moins un $i \in N_k$,

$$\frac{q_i^c\,(p_{-k}^0)}{Q_k^c\,(p_{-k}^0)} \leq \frac{q_i^c\,(p_{-k}^1)}{Q_k^c\,(p_{-k}^1)} \text{ (on doit toujours avoir } Q_k^c = \sum_{j \in N_k} q_j^c).$$

Si, d'autre part, $\dfrac{\partial D_k}{\partial p_h} \geq 0$ pour tout $h \neq k$, alors

$$Q_k^c\,(p_{-k}^0) \leq Q_k^c\,(p_{-k}^1),$$

et en conséquence, pour au moins un $i$, on doit avoir simultanément

$$q_i^c\,(p_{-k}^0) \leq q_i^c\,(p_{-k}^1) \text{ et } \frac{q_i^c\,(p_{-k}^0)}{Q_k^c\,(p_{-k}^0)} \leq \frac{q_i^c\,(p_{-k}^1)}{Q_k^c\,(p_{-k}^1)}$$

puisque la dernière inégalité est équivalente à :

$$\frac{q_i^c\,(p_{-k}^0)}{q_i^c\,(p_{-k}^1)} \leq \frac{Q_k^c\,(p_{-k}^0)}{Q_k^c\,(p_{-k}^1)} (\leq 1).$$

Cela donne de nouveau une contradiction dès lors que $C_i'' \geq 0$. Il en résulte que le vecteur des prix de la solution de Cournot sélectionnée est une fonction monotone croissante (isotone) du pavé $[0, p_0]^K$ vers lui-même. Comme $[0, p_0]^K$ forme un treillis complet (pour l'ordre naturel $\geq$) on peut appliquer le théorème de point fixe de Tarski [1955], et obtenir ainsi un équilibre cournotien de concurrence monopolistique. ■

L'utilisation du théorème de point fixe de Tarski [1955] pour démontrer l'existence d'un équilibre n'est pas nouvelle. Topkis [1979] l'utilise pour une classe générale de jeux non coopératifs. Frayssé (Théorème 2, [1986]), prouve de cette façon l'existence d'un équilibre de concurrence monopolistique (en démontrant une version particulière du théorème de Tarski). Vives [1990] et Milgrom-Roberts [1990] l'appliquent à différents modèles d'oligopole. Nous reviendrons sur ce type de résultat, et sur des conditions du type de la condition (c), dans la section suivante.

## STRATÉGIES DE PRIX OU STRATÉGIES DE QUANTITÉS

Nous avons vu qu'en introduisant le mécanisme des schémas de prix la solution de Cournot pouvait s'interpréter comme un équilibre en prix et en quantités. Cela permet de répondre à l'objection faite au concept de Cournot par Bertrand dans son bref compte rendu critique de 1883 et repris, entre autres[1], par Edgeworth [1897]. Cette objection consiste à faire valoir qu'à la solution de Cournot, chaque producteur peut accroître considérablement ses recettes s'il réduit très légèrement son prix et s'il satisfait toute la demande au nouveau prix, en supposant que les autres producteurs, eux, n'ajustent pas leurs prix. Mais c'est justement cette dernière supposition qui n'est pas faite par le producteur de Cournot, qui suppose au contraire que les autres producteurs vont suivre toute réduction du prix et conserver leurs parts du marché. L'intérêt du débat a cependant été de susciter l'élaboration d'une autre solution, fréquemment (mais abusivement) appelée « solution de Bertrand » et qui se ramène à l'équilibre d'un jeu réduit aux stratégies de prix. Sur ce débat est venu se greffer en outre l'idée d'une « dualité » entre ces deux théories alternatives de la concurrence imparfaite. Nous allons voir que cette dualité Cournot-Bertrand est non seulement contestable d'un point de vue historique (puisqu'il n'y a pas réellement de théorie de Bertrand) mais que, d'un point de vue théorique, elle reste d'une étendue très limitée.

Par dualité Cournot-Bertrand il faut comprendre qu'une même théorie formelle de concurrence imparfaite peut être interprétée alternativement comme une théorie de concurrence en quantités ou comme une théorie de concurrence en prix. Cependant, il faut clairement distinguer les deux cas dans lesquels cette dualité a été exprimée.

### Dualité dans le cas d'un bien homogène

Le premier cas a été remarquablement mis en lumière par Sonnenschein [1968] mais se trouve déjà explicité dans le livre même de Cournot. Il s'agit de la dualité entre le duopole analysé au chapitre VII, qui concerne deux producteurs offrant des quantités différentes d'un même bien à un prix qui doit nécessairement être le même, et le monopole complémentaire analysé au chapitre IX, qui concerne deux producteurs offrant chacun à des prix différents la quantité d'un facteur qui doit (pour des raisons techniques) nécessairement être la même pour donner la quantité demandée d'un produit composé. Dans le modèle de duopole on sait qu'il est « commode » d'introduire la fonction de demande inverse $\Delta$ et de considérer le prix

$$p = \Delta(q_1 + q_2)$$

1. Sur l'histoire du « débat Cournot-Bertrand », voir l'étude récente de J. Magnan de Bornier [1991].

qui permet d'écouler la somme des quantités $q_1 \geq 0$ et $q_2 \geq 0$ respectivement offertes par les deux producteurs (à coûts marginaux nuls). Dans le modèle de monopole complémentaire, on peut utiliser la fonction de demande

$$q = D(p_1 + p_2)$$

qui donne la quantité demandée de chaque facteur correspondant au prix total à payer $p_1 + p_2$, où $p_1$ est le prix du premier facteur et $p_2$ le prix du second facteur (les coûts marginaux de production étant de nouveau supposés nuls). Par dualité, on peut immédiatement trouver une « solution en prix » dans le modèle du monopole complémentaire à partir de la solution en quantités du duopole. Mais on voit aussi que le modèle dual de Cournot n'est pas ce qui est généralement considéré comme le modèle de Bertrand, à savoir un duopole en prix sur le marché d'un bien homogène, où la demande $D_i$ s'adressant à chaque producteur $i$ est déterminée de la façon suivante : $i, j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} D_i(p_1, p_2) &= D(p_i) && \text{si } p_i < p_j, \\ D_i(p_1, p_2) &= \frac{1}{2} D(p_i) && \text{si } p_i = p_j, \\ D_i(p_1, p_2) &= 0 && \text{si } p_i > p_j \end{aligned}$$

On voit que (à coûts marginaux nuls) dans le jeu en stratégies de prix où les profits de chaque producteur i sont donnés par la recette totale $p_i D_i(p_1, p_2)$, le seul équilibre possible (pour une fonction de demande non triviale) est $p_1^* = p_2^* = 0$. Toute autre paire de prix est soumise à l'objection de Bertrand. C'est cet équilibre qui est généralement appelé la « solution de Bertrand » (bien que Bertrand ne la considère pas comme telle)[1] et qui n'a rien à voir avec la solution en prix du monopole complémentaire.

### Dualité dans le cas de biens différenciés

Pour tenter de rétablir la dualité Cournot-Bertrand, Singh et Vives [1984] considèrent un duopole où les producteurs produisent des biens différenciés (qui peuvent être de qualité arbitrairement proche mais jamais parfaitement substituables comme ils le sont dans le duopole de Cournot critiqué par Bertrand). Pour prendre ici une formulation plus générale, partons d'un modèle de concurrence monopolistique à la Chamberlin [1933] réduit à deux producteurs ($i = 1, 2$) où chacun est confronté à une demande spécifique :

$$q_i = D_i(p_1, p_2) \quad i = 1, 2$$

ou, en notation vectorielle,

$$q = D(p).$$

1. Cela est souligné par Magnan de Bornier [1990] comme une lacune importante du raisonnement de Bertrand. Cependant, on peut suggérer que Bertrand ait rejeté comme solution admissible une paire de prix donnant un profit nul à chaque producteur.

En dénotant $C_i(q_i)$ le coût du producteur $i$, on peut écrire sa fonction de profit comme une fonction des prix $p_1$ et $p_2$ :

$$\Pi_i(p_1, p_2) = p_i D_i(p_1, p_2) - C_i(D_i(p_1, p_2)).$$

Alternativement, on peut, s'il existe, considérer le système inverse de demande :

$$(p_1, p_2) = p = \Delta(q) = (\Delta_1(q_1, q_2), \Delta_2(q_1, q_2))$$

et définir les profits comme des fonctions des $q_i$

$$\Pi_i(q_1, q_2) = q_i \Delta_i(q_1, q_2) - C_i(q_i).$$

On voit immédiatement que pour obtenir la dualité il faut dès l'abord introduire des hypothèses restrictives sur les coûts, à tout le moins supposer (comme le font Singh et Vives [1984]) des coûts marginaux constants :

$$C_i'(q_i) = c_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Alors, on peut substituer à $p_i$ le prix net $\hat{p}_i \equiv p_i - c_i$ et écrire :

$$\hat{\Delta}_i(q) \equiv \Delta_i(q) - c_i$$

$$\hat{D}_i(\hat{p}) \equiv D_i(p), \quad i = 1, 2.$$

Pour simplifier, supposons des coûts marginaux nuls. Dès lors, il est possible d'écrire de façon duale des conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre en prix et l'existence d'un équilibre en quantités, c'est-à-dire $p^*$ (ou $q^*$) tel que :

$$p_i^* \in \arg\max_{p_i} [p_i D_i(p_i, p_j^*)], \qquad i \neq j$$

$$(\text{ou } q_i^* \in \arg\max_{q_i} [q_i \Delta_i(q_i, q_j^*)], \quad i \neq j)$$

Il suffit de prendre, par exemple, les conditions de « submodularité » telles que définies par Milgrom et Roberts [1990] :

(1) $p_i \in [0, \bar{p}]$, pour $0 < \bar{p} < \infty$, ($q_i \in [0, \bar{q}]$ pour $0 < \bar{q} < \infty$), $i = 1, 2$.

(2) La demande $D_i$ (la demande inverse $\Delta_i$) est deux fois continûment différentiable.

(3) A tout maximum local de $p_i D_i(p)$, (de $q_i \Delta_i(q)$).

$$\partial_j D_i(p_i, p_j) + p_i \partial_{ij} D_i(p_i, p_j) \geq 0$$

$$(\partial_j \Delta_i(q_i, q_j) + q_i \partial_{ij} \Delta_i(q_i, q_j) \geq 0)$$ [1].

1. On dénote par $\partial_j$ l'opérateur de dérivée partielle par rapport à la $i$ème variable et par $\partial_{ij}$ l'opérateur de dérivée partielle croisée.

La condition (3) est une condition de « complémentarité stratégique » imposant que la dérivée partielle croisée des profits soit non négative, c'est-à-dire $\partial_{ij} \Pi_i \geq 0$, à tout maximum local de $\Pi_i$. Dans le cas où la variable stratégique est le prix $p_i$ on peut réécrire (3) (en sachant qu'à un maximum local, $p_i \partial_i \mathrm{D}_i(p) + \mathrm{D}_i(p) = 0$) :

$$\partial_j \mathrm{D}_i(p) - \frac{\mathrm{D}_i(p)}{\partial_i \mathrm{D}_i(p)} \partial_{ij} \mathrm{D}_i(p) \geq 0,$$

ou encore comme une condition sur l'élasticité-prix de la demande,

$$\partial_j \eta_i(p) = - \frac{\mathrm{D}_i(p) \cdot \partial_{ij} \mathrm{D}_i(p) - \partial_i \mathrm{D}_i(p) \cdot \partial_j \mathrm{D}_i(p)}{\mathrm{D}_i(p)^2} p_i \leq 0,$$

un terme qu'on retrouve dans la condition (c) de la proposition de la section précédente. Dans le cas où les coûts marginaux ne sont pas nuls (ou constants), les inégalités $\partial_{ij} \Pi_i \geq 0$ ne s'écrivent plus de façon duale en prix et en quantités. En quantités, comme $\mathrm{C}_i(q_i)$ est indépendant[1] de $q_j$, on conserve les mêmes inégalités qu'en (3). En prix par contre, celles-ci deviennent :

$$\partial_{ij} \Pi_i(p) = \partial_j \mathrm{D}_i(p) \, [1 - \mathrm{C}_i'' (\mathrm{D}_i(p)) \cdot \partial_i \mathrm{D}_i(p)] + \partial_{ij} \mathrm{D}_i(p) [p_i - \mathrm{C}_i' (\mathrm{D}_i(p))] \geq 0,$$

ce qui implique des conditions sur les coûts.

Enfin, notons que Singh et Vives [1984], pour rendre endogène le choix des stratégies en prix ou en quantités dans un jeu en deux étapes, introduisent des hypothèses plus fortes sur la demande, impliquant en particulier que la substituabilité, pour le cas des prix, la complémentarité pour le cas des quantités, sont équivalents à la complémentarité stratégique. Ainsi en est-il dans l'exemple d'un système linéaire de demande ; avec $b_{12} = b_{21}$, $\beta_{12} = \beta_{21}$, $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$ et $a_i b_{jj} - a_j b_{12} > 0$ $(i \neq j)$, on a

$$\mathrm{D}_1(p) = \max \{0, a_1 - b_{11} p_1 - b_{12} p_2\}, \ \Delta_1(q) = \max \{0, \alpha_1 - \beta_{11} q_1 - \beta_{12} q_2\}$$
$$\mathrm{D}_2(p) = \max \{0, a_2 - b_{12} p_1 - b_{22} p_2\}, \ \Delta_2(q) = \max \{0, \alpha_2 - \beta_{12} q_1 - \beta_{22} q_2\},$$

où $\alpha_i = (a_i b_{jj} - a_j b_{12})/(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)$, $\beta_{ii} = b_{jj}/(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)$, $i \neq j$, et $\beta_{12} = - b_{12}/(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)$.

En effet, les deux biens sont substituables, indépendants ou complémentaires selon que $\beta_{12}$ est (respectivement) positif, nul ou négatif et la condition (3) de complémentarité stratégique revient à imposer la non-positivité de $b_{12}$ (ou encore $\beta_{12} \geq 0$) pour la concurrence en prix et la non-positivité de $\beta_{12}$ pour la concurrence en quantités. Le cas homogène (qui est exclu par hypothèse)

1. Cela montre que, pour assurer l'existence d'un équilibre en quantités, on peut imposer des conditions plus faibles sur les coûts : voir Novshek [1985] et Frayssé [1986].

serait celui où $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{22}$. Dans ce cadre, Singh et Vives[1] montrent que si chaque producteur devait choisir (irrévocablement) dans une étape préliminaire soit d'utiliser (dans l'étape suivante) une stratégie de prix, soit d'utiliser une stratégie de quantité, alors choisir une politique de quantité (de prix) est une stratégie dominante si les biens sont substituables (complémentaires). En outre, que les biens soient substituables ou complémentaires, les prix seront plus élevés (et les quantités produites moindres) à l'équilibre en quantités qu'à l'équilibre en prix (ou équilibre de concurrence monopolistique), ce qui rend ce dernier meilleur en termes de bien-être.

Cette manière de rendre endogène et irrévocable le choix stratégique d'une politique de prix ou de quantités semble cependant très exigeante. D'un point de vue pratique il faudrait justifier le caractère irrévocable de ce choix en montrant en quoi il résulterait de certaines décisions (d'investissement ou d'organisation interne) de long terme. On peut d'ailleurs défendre l'idée qu'en pratique la concurrence implique le plus souvent une politique *combinée* de prix et de quantités. C'est ce type de politique combinée que l'introduction des schémas de prix tente de représenter d'une certaine façon. D'autres façons ont été proposées, comme l'approche en termes de « variations conjecturales » ou l'approche en termes de « courbes d'offre »[2]. Quant à l'approche plus tranchée de Singh et Vives, elle est exigeante aussi d'un point de vue théorique. En effet, pour qu'elle puisse fonctionner il faut qu'un équilibre parfait existe, c'est-à-dire qu'un équilibre existe dans chacun des sous-jeux de seconde étape, que ce sous-jeu soit un jeu en prix, un jeu en quantités ou un jeu combiné. Cela demande des hypothèses très restrictives. Comme suggéré par le travail de Salant [1986] (voir aussi Eaton et Lipsey [1989], p. 755-756), le choix entre une politique de prix ou de quantités peut être dicté par des considérations d'existence. L'exemple suivant montre l'importance de ce choix du point de vue de l'existence et le rôle des schémas de prix dans un modèle de différenciation horizontale.

## Concurrence en prix ou en quantités dans un modèle de différenciation horizontale

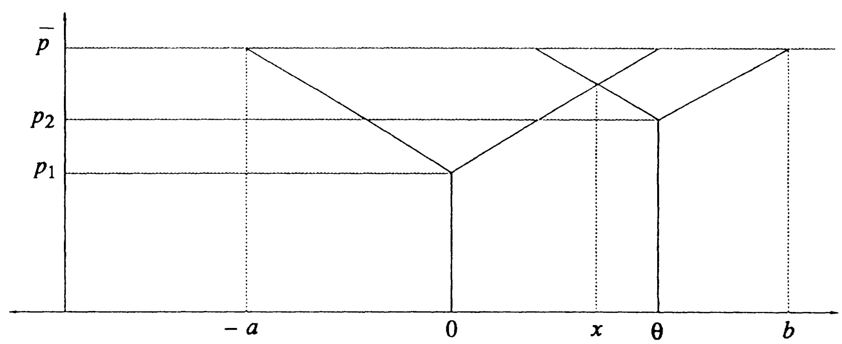
Comme exemple de différenciation horizontale, considérons une version modifiée du modèle bien connu de Hotelling [1929]. Cette modification en fait d'ailleurs un exemple plus proche du modèle (moins connu) de Launhardt [1885], qui représente probablement la première théorie de concurrence en prix, devançant de plus de quarante ans les théories de Chamberlin et de Hotelling.

1. Voir aussi Cheng [1985]. Il s'agit en fait à la première étape de choisir une courbe d'offre comme dans Grossman [1981]. Simplement, le choix est limité à deux courbes, l'une horizontale (pour la politique de prix), l'autre verticale (pour la politique de quantité). Klemperer et Meyer [1986] considèrent un jeu en une étape mais introduisent l'incertitude et des coûts marginaux non constants. Sans incertitude, à stratégie donnée de l'autre, un producteur apparaît comme un monopole faisant face à une demande résiduelle et peut donc indifféremment choisir un prix ou une quantité.

2. Pour les variations conjecturales, on peut citer l'exemple du résultat (voir Kamien et Schwartz [1983]) montrant l'équivalence entre l'équilibre de Cournot et un équilibre en prix avec variations conjecturales positives. Pour les courbes d'offre, voir la note précédente.

Supposons deux vendeurs d'un bien homogène, localisé chacun en un point d'une droite de longueur $l > 0$. Les consommateurs sont distribués uniformément le long de cette droite. En chaque point de la droite une unité du bien exactement est demandée pour tout prix inférieur ou égal à un prix de réserve positif $\bar{p}$. Tout consommateur se fournira chez le vendeur dont le prix-rendu — c'est-à-dire le prix de vente plus le coût de transport — est le plus bas. On dénote $p_1$ et $p_2$ les prix respectifs des vendeurs et $c$ le coût de transport par unité de distance (supposé constant). La droite $l$ est supposée suffisamment longue, contenant l'intervalle $[-\bar{p}/c, 3\bar{p}/c]$ de telle sorte que, même à prix nuls, tous les consommateurs ne consommeront pas. Pour représenter la situation graphiquement, supposons que le premier vendeur soit localisé au point 0 et le second au point $\theta$, $0 < \theta < 2\bar{p}/c$. L'aire de marché de chaque vendeur est représentée par l'ensemble des consommateurs (ou des points de la droite) pour lesquels le prix rendu de ce vendeur n'est pas supérieur à $\bar{p}$ : soit $[-a, a]$ pour le premier, $[2\theta - b, b]$ pour le second. Mais ces aires de marché peuvent s'intersecter à partir d'un point $x$ (voir le graphique 1), les consommateurs à gauche de $x$ s'adressant au premier vendeur, ceux à droite s'adressant au second.

Graphique 1




On voit immédiatement que $a$ est tel que $p_1 + ca = \bar{p}$ et $b$ tel que $p_2 + c(b - \theta) = \bar{p}$, ce qui donne :

$$a = \frac{1}{c}(\bar{p} - p_1),\ (b - \theta) = \frac{1}{c}(\bar{p} - p_2).$$

Si les deux aires de marché sont disjointes, on a deux monopoles locaux indépendants et $\theta > a + (b - \theta)$ ou encore : $c\theta > 2\bar{p} - p_1 - p_2$. Si elles s'intersectent (sans que l'une inclue l'autre), le point $x$ est tel que $p_1 + cx = p_2 + c(\theta - x)$, ce qui donne :

$$x = \frac{1}{2c}(c\theta + p_2 - p_1),\quad \theta - x = \frac{1}{2c}(c\theta + p_1 - p_2).$$

De ces calculs préliminaires, on peut dériver facilement la demande s'adressant à chaque vendeur ($i = 1, 2, i \neq j = 1, 2$) pour $p_i, p_j \in [0, \bar{p}]$ :

$$D_i(p) = \frac{\bar{p} - p_i}{c} + \min\left\{\frac{\bar{p} - p_i}{c}, \frac{p_j - p_i + c\theta}{2c}\right\}, \quad \text{si } p_j - c\theta < p_i < p_j + c\theta$$

$$= 2\,\frac{\bar{p} - p_i}{c}, \qquad \text{si } p_i < p_j - c\theta \text{ (monopole de } i)$$

$$= 0, \qquad \text{si } p_i > p_j + c\theta \text{ (monopole de } j)$$

On voit que la fonction de demande $D_i$ a deux discontinuités, l'une au point $p_i = p_j - c\theta$ (si $p_j > c\theta$), l'autre au point $p_i = p_j + c\theta$ (si $p_j < \bar{p} - c\theta$). En ces points, la demande est *a priori* indéterminée, si ce n'est que :

$$\frac{\bar{p} - p_i}{c} + \theta \leq D_i(p_j - c\theta, p_j) \leq 2\,\frac{\bar{p} - p_i}{c}$$

$$\text{et} \qquad 0 \leq D_i(p_j + c\theta, p_j) \leq \frac{\bar{p} - p_i}{c}.$$

### *Inexistence d'un équilibre en prix ou en quantités*

Ces discontinuités de la demande sont à la base de l'inexistence d'un équilibre lorsque $\theta$ est suffisamment proche de zéro. Mais envisageons d'abord les différents régimes d'équilibre concevables dans ce modèle, en prix et en quantités.

On doit d'abord considérer un régime de monopoles locaux indépendants : chaque vendeur $i$ maximise $[p_i \cdot 2(\bar{p} - p_i)/c]$, dans son prix $p_i$, ce qui conduit au choix du prix $p_i^M = \bar{p}/2$. Si les monopoles locaux sont indépendants, c'est que les aires de marché n'interfèrent pas, ce qui impose comme condition nécessaire d'existence d'un tel régime que $a + (b - \theta) \leq \theta$ lorsque les deux vendeurs choisissent $p_i^M = p_j^M = \bar{p}/2$, impliquant : $\theta \geq \bar{p}/c$. On peut remarquer que le choix des quantités comme variables stratégiques conduit dans ce cas de figure au même résultat. En effet, pour $(q_i + q_j)/2 \leq \theta$, on peut définir une fonction de demande inverse $\Delta_i^M(q_i, q_j) = \bar{p} - cq_i/2$. La maximisation de $[q_i \cdot \Delta_i^M(q_i, q_j)]$ conduit alors au choix de $q_i^M = \bar{p}/c$, avec $\Delta_i^M(\bar{p}/c, \bar{p}/c) = \bar{p}/2 = p_i^M$.

Si $\theta < \bar{p}/c$, les deux vendeurs ne peuvent plus choisir simultanément leurs prix (ou leurs quantités) de monopole. Un régime (non nécessairement symétrique) de monopoles locaux liés par la condition de juxtaposition des aires de marché est cependant possible. Un équilibre en prix dans ce régime est un couple $(p_i^*, p_j^*)$ tel que les aires de marché sont juxtaposées, ce qui se traduit par l'égalité $p_i^* + p_j^* = 2\bar{p} - c\theta$, tel aussi que $p_i^* \geq \bar{p}/2$ pour $i = 1, 2$, avec au moins une inégalité stricte, ce qui implique que $i$ n'a pas intérêt à dévier vers un prix plus élevé, tel enfin que le profit de monopole $p_i^* \cdot 2(\bar{p} - p_i^*)/c$ domine pour chaque $i$ le profit qu'il pourrait atteindre en déviant vers un prix plus bas entraînant le recouvrement partiel des aires de marché ou l'absorption de l'aire de son concurrent dans la sienne. Compte tenu de la continuité de la demande en ce point, la dernière propriété implique notamment :

$$\frac{\partial^- (p_i^* D_i(p_i^*, p_j^*))}{\partial p_i} = \frac{2\bar{p} + c\theta + p_j^* - 6p_i^*}{2c} \geq 0, \qquad i = 1, 2.$$

En additionnant membre à membre les deux inégalités et en utilisant la condition de juxtaposition des aires de marché, on obtient :

$$4\bar{p} + 2c\theta - 5(p_i^* + p_j^*) = 7c\theta - 6\bar{p} \geq 0,$$

de sorte que l'existence d'un équilibre en prix dans ce régime impose : $\theta \geq (6/7)\bar{p}/c$.

Si les variables stratégiques sont les quantités, la condition de juxtaposition des aires de marché s'écrit, plus simplement encore, $(q_i^* + q_j^*)/2 = \theta$ et on obtient par un raisonnement analogue le même type de résultats. Mais la condition de non-déviation doit maintenant être calculée en utilisant une fonction de demande inverse, propre au régime de recouvrement partiel des aires de marché. Or le système de demande dans ce régime

$$D_i^D(p) = \frac{2\bar{p} + c\theta}{2c} - \frac{3p_i}{2c} + \frac{p_j}{2c} \qquad i = 1, 2, \ i \neq j = 1, 2,$$

est simplement un exemple du système linéaire de demande rencontré précédemment, avec $a_1 = a_2 = (2\bar{p} + c\theta)/2c$, $b_{11} = b_{22} = 3/2c$ et $b_{12} = b_{21} = -1/2c$. Le système de demande inverse est donc :

$$\Delta_i^D(q) = \alpha_i - \beta_{ii} q_i - \beta_{ij} q_j = \bar{p} + \frac{c\theta}{2} - \frac{3}{4}cq_i - \frac{1}{4}cq_j \qquad i = 1, 2, \ i \neq j = 1, 2.$$

Ainsi, la condition de non-déviation s'énonce :

$$\frac{\partial^+ (q_i^* \Delta_i^D(q_i^*, q_j^*))}{\partial q_i} = \bar{p} + \frac{c\theta}{2} - \frac{1}{4}cq_j^* - \frac{3}{2}cq_i^* \leq 0 \qquad i = 1, 2,$$

ce qui conduit, par addition membre à membre des deux inégalités et en utilisant la condition de juxtaposition des aires de marché, à :

$$2\bar{p} + c\theta - \frac{7}{4}c(q_i^* + q_j^*) = 2\bar{p} - \frac{5}{2}c\theta \leq 0,$$

de sorte que l'existence d'un équilibre en quantités dans ce régime impose $\theta \geq (4/5)\bar{p}/c$, une condition plus faible que pour l'existence d'un équilibre en prix.

Le troisième régime est celui d'un duopole véritable, avec recouvrement partiel des aires de marché. Compte tenu de la remarque qui précède, selon laquelle on est en présence d'un système linéaire de demande, avec des biens substituables ($b_{ij} < 0$), on retrouve ici l'exemple étudié par Singh et Vives [1984]. L'équilibre est toujours symétrique, avec $p_i^D = p_j^D = (2\bar{p} + c\theta)/5$ si les variables stratégiques sont les prix et $q_i^D = q_j^D = (4\bar{p}/c + 2\theta)/7$ si les variables stratégiques sont les quantités. La seule particularité du présent modèle est qu'un tel équilibre n'existe que pour certaines valeurs du paramètre $\theta$. Lorsque $\theta$ atteint une valeur suffisamment élevée, on passe (de manière continue) à un équilibre de monopoles locaux avec juxtaposition des aires de marché. Mais, lorsque les vendeurs se rapprochent et que $\theta$ prend des valeurs en dessous d'une certaine valeur critique, les vendeurs ont intérêt à dévier en faisant un choix stratégique tel que leur aire de marché contienne celle de leur concurrent, rompant ainsi l'équilibre.

Considérons d'abord le cas d'un équilibre en prix. Le couple $(p_i^D, p_j^D)$ ne peut être un équilibre que si le profit qu'il assure à chaque vendeur $i$ est au moins aussi grand que celui que $i$ atteindrait en choisissant un prix de monopole $p_i = p_j^D - c\theta - \varepsilon$, avec $\varepsilon$ arbitrairement proche de zéro (on remarque que ce prix est positif si $\theta < \bar{p}/2c$). Un tel profit est :

$$
\begin{aligned}
(p_j^D - c\theta - \varepsilon)\, D_i(p_j^D - c\theta - \varepsilon, p_j^D) &\simeq (p_j^D - c\theta) \cdot 2\,\frac{\bar{p} - p_j^D + c\theta}{c} \\
&= 4(\bar{p} - 2c\theta)\,(3\bar{p} + 4c\theta)/25c
\end{aligned}
$$

et l'on vérifie que ce profit n'est pas supérieur au profit d'équilibre $3(2\bar{p} + c\theta)^2/50c$ si $\theta \gtrsim 0{,}263\, \bar{p}/c$. Il est par ailleurs immédiat qu'un régime où une aire de marché contient l'autre ne peut pas conduire à un équilibre. En effet, si un vendeur $i$ est hors du marché, avec $p_i \geq p_j + c\theta$, il peut toujours atteindre un profit positif en déviant vers un prix positif mais inférieur à $p_j + c\theta$. Et si tous les deux coexistent, avec $p_i = p_j + c\theta$, le vendeur $j$ peut certainement augmenter son profit en baissant légèrement son prix et en éliminant le concurrent, sauf si $p_i = 0$. Mais alors, il peut atteindre un profit positif en augmentant son prix. Ainsi, aucun équilibre n'existe si $\theta < 0{,}263\, \bar{p}/c$, une conclusion tout à fait analogue à celle obtenue dans le modèle classique de Hotelling[1].

Qu'en est-il lorsque les quantités sont les variables stratégiques ? En raisonnant à partir de la demande inverse, on peut supprimer les situations où $p_i < p_j - c\theta$ ($i = 1, 2$), $p_j$ n'étant pas le prix minimum compatible avec un marché soldé par $p_i$, lorsque $q_i$ et $q_j$ sont données. On obtient ainsi des fonctions de profit continues, la demande inverse ne présentant pas de discontinuités analogues à celles de la demande aux points tels que $p_i = p_j - c\theta$ ($i = 1, 2$). Ces propriétés traduisent formellement le fait, souligné par Eaton et Lipsey [1989] à propos de l'article de Salant [1986], que « the undercutting temptation is

1. Voir d'Aspremont, Gabszewicz et Thisse [1979].

removed when competition is in quantities » (p. 755). Mais, même si toute stratégie de remise dans le seul but d'éliminer le concurrent du marché perd sa raison d'être dans un jeu en quantités, il reste cependant pour un vendeur $i$ le choix d'une quantité $q_i$ qui, à $q_j$ donné, conduit à un prix $p_i = p_j - c\theta$ ou, pour définir la demande inverse, conduit à :

$$\Delta_i^0 (q_i, q_j) = \bar{p} - c(q_i + q_j)/2 = \Delta_j^0 \ (q_i, q_j) - c\theta \text{ si } q_i - q_j \geq 2\theta .$$

La condition de non-déviation, autorisant l'existence d'un équilibre en quantités avec recouvrement partiel des aires de marché, peut alors s'énoncer :

$$q_i^D \, \Delta_i^D(q_i^D, q_j^D) \geq q_i \ \Delta_i^0 \ (q_i, q_j^D) \text{ pour tout } q_i \text{ tel que } q_i \geq 2\theta + q_j^D.$$

Cette condition est équivalente, comme on peut le vérifier par un calcul simple, à :

$$\begin{aligned} \frac{3c}{49}\left(2\,\frac{\bar{p}}{c} + \theta\right)^2 &\geq \frac{12c}{49}\left(\frac{\bar{p}}{c} + 4\theta\right)\left(\frac{\bar{p}}{c} - 3\theta\right) && \text{si } \theta \geq \frac{1}{17}\,\frac{\bar{p}}{c} \\ &\geq \frac{c}{98}\left(5\,\frac{\bar{p}}{c} - \theta\right)^2 && \text{si } \theta \leq \frac{1}{17}\,\frac{\bar{p}}{c} . \end{aligned}$$

La première inégalité est toujours vérifiée, la seconde implique :

$$\theta \gtrsim 0{,}029\,\frac{\bar{p}}{c} .$$

Ainsi, la valeur critique au-dessous de laquelle l'équilibre en quantités avec recouvrement partiel des aires de marché cesse d'exister est plus faible que la valeur correspondante pour l'équilibre en prix. L'impossibilité, dans le jeu en quantités, d'éliminer le concurrent du marché et de récupérer sa clientèle exerce bien un effet stabilisant. Mais cet effet est insuffisant pour assurer l'existence d'un équilibre lorsque les vendeurs sont trop proches, c'est-à-dire lorsque les biens ne sont pas assez différenciés. Et un régime où l'aire de marché d'un vendeur contient celle de l'autre est impossible. En effet, le vendeur $j$ pratiquant le prix le plus élevé vendrait alors la quantité la plus faible, ce qui est incompatible avec les conditions nécessaires du premier ordre :

$$\frac{\Delta_i^0(q)}{q_i} = -\frac{\partial \Delta_i^0(q)}{\partial q_i} = \frac{c}{2} = -\frac{\partial \Delta_j^0(q)}{\partial q_j} = \frac{\Delta_j^0(q)}{q_j} \text{ avec } q_i - q_j \geq 2\theta .$$

Et il est facile de vérifier que dans le cas frontière où $q_i - q_j = 2\theta$, un au moins des deux vendeurs a intérêt à dévier vers une situation de recouvrement partiel des aires de marchés.

## *Existence d'un P-équilibre*

Considérons maintenant une logique plus conforme à notre interprétation de Cournot que celle qui lui est attribuée lorsque les vendeurs ont les seules quantités pour variables stratégiques et limitons-nous à des schémas de prix qui suppriment explicitement la tentation d'éliminer le concurrent (*the undercutting temptation*). Il nous faut alors mettre en évidence l'existence de deux situations foncièrement différentes, en dehors du cas très simple où l'on est en présence de monopoles locaux indépendants. Dans une première situation, correspondant à un régime de recouvrement partiel des aires de marché, les biens sont imparfaitement substituables, les vendeurs contrôlent une partie du marché et se font concurrence sur une clientèle marginale — une situation qui correspond fondamentalement à la concurrence monopolistique. Dans une deuxième situation, où l'aire de marché d'un vendeur en vient à contenir celle de l'autre, les biens deviennent, pour la clientèle « naturelle » du vendeur menacé, parfaitement substituables (en tenant compte d'une remise accordée $c\theta$). Il est donc raisonnable dans cette situation d'appliquer l'idée cournotienne que, le prix étant le même (à la remise près) pour l'un et l'autre vendeur, ceux-ci sont confrontés à une demande résiduelle, comme définie ci-dessus (p. 971). Cela revient à s'en tenir tout d'abord à la demande :

$$\mathrm{D}_i(p) = \frac{\bar{p} - p_i}{\mathrm{c}} + \min\left\{\frac{\bar{p} - p_i}{c}, \frac{p_j - p_i + c\theta}{2c}\right\}, \text{ avec } p_j - c\theta \leq p_i \leq p_j + c\theta,$$

une fonction que nous avons, par commodité de notation, étendue de manière continue aux limites de l'intervalle admissible. La demande « résiduelle », soit $\tilde{\mathrm{D}}_i(p, q_j)$, à laquelle chaque vendeur $i$ est confronté n'est pas donnée par la demande que nous venons de définir, précisément lorsque ces limites sont atteintes. On a alors, pour $p_i, p_j \in [0, \bar{p}]$ et $0 \leq q_j \leq \mathrm{D}_i(p) + (\mathrm{D}_j(p)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{D}}_i(p, q_j) &= \mathrm{D}_i(p) && \text{si } p_j - c\theta < p_i < p_j + c\theta\\ &= \max\left\{\frac{1}{c}(\bar{p} - p_i) + \theta,\ \mathrm{D}_i(p) + \mathrm{D}_j(p) - q_j\right\} && \text{si } p_j - c\theta = p_i\\ &= \min\left\{\frac{1}{c}(\bar{p} - p_i),\ \mathrm{D}_i(p) + \mathrm{D}_j(p) - q_j\right\} && \text{si } p_i = p_j + c\theta.\end{aligned}$$

Pour tout schéma de prix P excluant l'« undercutting » (c'est-à-dire excluant, pour $i = 1, 2, p_i < p_j - c\theta$), un P-équilibre est alors un vecteur $(q^*, \psi^*)$ tel que chaque vendeur $i$ maximise son profit $p_i(\psi_i, \psi_j^*)q_i$ en choisissant $(q_i, \psi_i)$ à $(q_j^*, \psi_j^*)$ donné et de telle manière que la quantité $q_i$ ne dépasse pas la demande résiduelle $\tilde{\mathrm{D}}_i(\mathrm{P}(\psi_i, \psi_j^*), q_j^*)$.

Pour prendre un exemple simple de schéma de prix de « no-undercutting », définissons la fonction $P^{nu}$ associant à des signaux $\psi_i$, $\psi_j$, non négatifs, des prix $p_i$, $p_j$ tels que :

$$p_i = P_i^{nu}\ (\psi_i, \psi_j) = \max\ \{\psi_i, \psi_j - c\theta\},\ i = 1, 2\ ;\ \ i \neq j = 1, 2.$$

Pour cet exemple, nous pouvons montrer qu'il existe un $P^{nu}$-équilibre pour toute valeur du paramètre de localisation $\theta$.

En effet, lorsque les vendeurs sont trop proches pour qu'un $P^{nu}$-équilibre de concurrence monopolistique (avec recouvrement partiel des aires de marché) existe, alors on peut démontrer l'existence d'un autre type d'équilibre où l'aire de marché d'un vendeur contient celle de l'autre. Cette valeur critique de $\theta$ est déterminée par l'inégalité :

$$p_i^D\, D_i(p_i^D, p_j^D) \geq \max_{p_j^D + c\theta \leq p_i \leq \bar{p}} p_i\, \tilde{D}_i(p_i, p_i - c\theta, D_j\,(p_i^D, p_j^D))$$

c'est-à-dire

$$\frac{3}{50c}(2\bar{p} + c\theta)^2 \geq \max_{p_j^D + c\theta \leq p_i \leq \bar{p}} p_i \cdot \min\left\{\frac{1}{c}(\bar{p} - p_i),\ \frac{2}{c}(\bar{p} + c\theta - p_i) - \frac{3}{10c}(2\bar{p} + c\theta)\right\}$$

$$= \max_{\frac{2}{5}\bar{p} + \frac{12}{10}c\theta \leq p_i \leq \frac{2}{5}\bar{p} + \frac{17}{10}c\theta} p_i \frac{\bar{p} - p_i}{c}$$

$$= \frac{6}{25c}(\bar{p} + 3c\theta)(\bar{p} - 2c\theta),\ \text{si}\ \theta \geq \frac{1}{12}\frac{\bar{p}}{c}$$

$$= \frac{1}{4c}\bar{p}^2,\ \text{si}\ \frac{1}{17}\frac{\bar{p}}{c} < \theta < \frac{1}{12}\frac{\bar{p}}{c}$$

$$= \frac{1}{100c}(4\bar{p} + 17c\theta)(6\bar{p} - 17c\theta),\ \text{si}\ \theta \leq \frac{1}{17}\frac{\bar{p}}{c},$$

où $\frac{2}{5}\bar{p} + \frac{17}{10}c\theta$ est la valeur de $p_i$ qui rend égaux les deux termes du min.

Cela donne la condition $\theta \gtrsim 0{,}034\ \bar{p}/c$.

Autrement, pour $\theta < 0{,}034\,\frac{\bar{p}}{c}$, un exemple[1] de $P^{nu}$-équilibre est donné par :

1. Il y a d'autres équilibres du même type : $\max\left\{\frac{1}{7}(3\bar{p} - 2c\theta), \frac{1}{5}(2\bar{p} + 7c\theta)\right\} \leq \psi_i^* \leq \frac{1}{2}\bar{p}$, $0 \leq \psi_j^* \leq c\theta$, $q_i^* = D_i(P^{nu}(\psi^*))$, $q_j^* = D_j(P^{nu}(\psi^*))$. Ces équilibres existent pour tout $\theta \leq \frac{1}{14}\bar{p}/c \cong 0{,}071\ \bar{p}/c$.

$$\psi_i^* = \frac{1}{2}\bar{p},\ \psi_j^* = c\theta \text{ (d'où } p_i^* = \psi_i^* \text{ et } p_j^* = \psi_i^* - c\theta),$$

$$q_i^* = \frac{1}{c}(\bar{p} - p_i^*) = \frac{1}{2}\frac{\bar{p}}{c},\ q_j^* = \frac{1}{c}(\bar{p} - p_j^* + c\theta) = \frac{1}{2}\frac{\bar{p}}{c} + 2\theta.$$

En effet, le vendeur $i$ n'a pas intérêt à annoncer un prix $\psi_i$ au-dessus de $p_i^*$ puisque, pour tout $p_i \geq \frac{1}{2}\bar{p}$,

$$\frac{\partial}{\partial p_i} p_i\,[\mathrm{D}_i(p) + \mathrm{D}_j(p) - q_j^*] = \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{p_i}{c}\,[2(\bar{p} + c\theta - p_i) - (\bar{p} - p_i^* + 2c\theta)]$$

$$= \frac{1}{c}(\bar{p} + p_i^* - 4p_i) < 0,$$

ni non plus à annoncer un prix $\psi_i \geq 0$ en dessous de $p_i^*$ puisque, pour $p_i$ dans cet intervalle, $\frac{p_i}{c}(\bar{p} - p_i) < \frac{p_i}{c}(\bar{p} - p_i^*)$ et, si $\psi_i \leq 2c\theta$ (donc $p_i = \psi_i$ et $p_j = \psi_j^*$),

$$\frac{\partial}{\partial p_i}[p_i \cdot \mathrm{D}_i(p_i, p_j)] = \frac{1}{c}(\bar{p} + c\theta - 3p_i) \geq \frac{1}{c}(\bar{p} - 5c\theta) \geq 0,$$

pour $\theta \leq 0{,}2\,\bar{p}/c$. Étant donné le schéma de prix $\mathrm{P}^{nu}$, le vendeur $j$ quant à lui ne pourrait qu'annoncer un prix $\psi_j$ supérieur à $p_i^* - c\theta$ pour dévier effectivement. Mais si $p_i^* - c\theta \leq \psi_j \leq p_i^* + c\theta$, on a $p_j = \psi_j$ et (avec $p_i = p_i^*$) :

$$\frac{\partial}{\partial p_j}[p_j\,\mathrm{D}_j(p_j, p_i^*)] = \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{p_j}{2c}(2\bar{p} + c\theta + p_i^* - 3p_j)\right] \leq \frac{1}{2c}[2\bar{p} + 7c\theta - 5p_i^*] \leq 0,$$

pour $\theta \leq \frac{1}{14}\bar{p}/c \simeq 0{,}071\,\bar{p}/c$. Enfin, si $\psi_j > p_i^* + c\theta$, on a $p_j = \psi_j$, $p_i = \psi_j - c\theta > p_i^*$ et le profit qui peut être obtenu

$$\max_{p_i^* + c\theta \leq p_j \leq \bar{p}} p_j\,\tilde{\mathrm{D}}_j(p_j, p_j - c\theta, q_i^*) \leq \max_{\frac{1}{2}\bar{p} + c\theta \leq p_j \leq \bar{p}} \frac{1}{c} p_j(\bar{p} - p_j)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{1}{4}\bar{p}^2 - c^2\theta^2\right)$$

est inférieur au profit d'équilibre :

$$p_j^* q_j^* = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\bar{p} - c\theta\right)\left(\frac{1}{2}\bar{p} + 2c\theta\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{4}\bar{p}^2 - 2c^2\theta^2 + \frac{1}{2}\bar{p}c\theta\right),$$

si $\theta < \frac{1}{2}\bar{p}/c$, ce qui se vérifie pour les valeurs faibles de $\theta$ considérées.

En conclusion, dans le modèle de duopole spatial que nous étudions, un équilibre existe pour toutes les localisations possibles (même proches) si suffisamment de coordination est introduite dans la fixation des prix. Celle qui est implicitement introduite lorsque les quantités sont prises comme variables stratégiques ne suffit pas – contrairement aux cas couverts par les hypothèses de Salant [1986]. Des schémas de prix du genre $P^{nu}$ suffisent. L'équilibre exhibé pour des localisations proches est très asymétrique : le vendeur qui contrôle le prix vers le haut vend moins à un prix plus élevé, l'autre pratique une remise de prix (tout en donnant un signal de prix encore plus bas, ce qui est crucial pour l'argument d'existence) et vend davantage. On retrouve en quelque sorte les conclusions du modèle de la « firme barométrique ». Mais que ce soit du modèle de Salant ou de ce modèle-ci, la leçon à tirer est la même : une certaine coordination de l'industrie est nécessaire pour éviter les inconvénients qui, comme une instabilité chronique ou des guerres de prix dévastatrices, pourraient résulter d'une absence d'équilibre.

## *RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES*

ANDERSON R. [1983], « Quick Response Equilibrium ». Discussion Paper n° 323, Center for Research in Management Science, Berkeley (Ca), University of California.

D'ASPREMONT C., DOS SANTOS FERREIRA R., GÉRARD-VARET L.-A. [1991], « Pricing Schemes and Cournotian Equilibria », *The American Economic Review*, 81(3), p. 666-673.

D'ASPREMONT C., JASKOLD GABSZEWICZ J., THISSE J. F. [1979], « On Hotelling's Stability in Competition », *Econometrica*, 47(5), p. 1145-1150.

BAIN J. S. [1960], « Price Leaders, Barometers, and Kinks », *The Journal of Business*, 23 (3), p. 193-203.

BERTRAND J. [1883], « Revue de la " Théorie mathématique de la richesse sociale " et des " Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses " », *Journal des savants*, septembre, p. 499-508.

CHAMBERLIN E. H. [1933], *The Theory of Monopolistic Competition*, Cambridge (Mass.), Cambridge University Press.

CHENG L. [1985], « Comparing Bertrand and Cournot Equilibria : a Geometric Approach », *Rand Journal of Economics*, 16 (1), p. 146-152.

COOPER T. C. [1986], « Most-Favored Customer Pricing and Tacit Collusion », *Rand Journal of Economics*, 17 (3), p. 377-388.

COURNOT A. [1838], *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris. Nouvelle édition, 1980, *Les œuvres complètes de Cournot*, vol. III, Paris.

DENECKERE R., KOVENOCK D. [1988], « Price Leadership ». Discussion Paper n° 773, The Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

DOYLE C. [1988], « Different Selling Strategies in Bertrand Oligopoly », *Economics Letters*, 28, p. 387-390.

EDGEWORTH F. Y. [1987], « La teoria pura del Monopolio », *Giornale degli Economisti*.

EATON B. E., LIPSEY R. G. [1989], « Product Differentiation » dans R. SCHMALENSEE et R. D. WILLIG (eds.), *Handbook of Industrial Organization*, vol. I., p. 723-768.

FRAYSSE J. [1986], *Équilibres de Cournot dans les grands marchés*, monographie d'économétrie, Paris, Éditions du CNRS.

GARY-BOBO R. [1989], *Équilibre général et concurrence imparfaite*, monographie d'économétrie, Paris, Éditions du CNRS.

GROSSMAN S. [1981], « Nash Equilibrium and the Industrial Organization of Markets with Large Fixed Costs », *Econometrica*, 49, p. 1149-1172.

HOLT C. A., SCHEFFMAN D. T. [1987], « Facilitating Practices : the Effects of Advance Notice and Best-Price Policies », *Rand Journal of Economics*, 18(2), p. 187-197.

HOTELLING H. [1929], « Stability in Competition », *Economic Journal*, 39, p. 41-57.

KALAI E., STANFORD W. [1985], « Conjectural Variations Strategies in Accelerated Cournot Games », *International Journal of Industrial Organization*, 3, p. 133-152.

KALAI E., SATTERTHWAITE M. A. [1986], « The Kinked Demand Curve, Facilitating Practices, and Oligopolistic Coordination », MEDS Discussion Paper n° 677, Northwestern University.

KAMIEN M. I., SCHWARTZ N. L. [1983], « Conjectural Variations », *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 19, p. 191-211.

KLEMPERER P., MEYER M. [1986], « Price Competition vs. Quantity Competition : the Role of Uncertainty », *Rand Journal of Economics*, 17, p. 618-638.

KREPS D., SCHEINKMAN J. A. [1983], « Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes », *Bell Journal of Economics*, 14, p. 326-337

LAUNHARDT W. [1885], *Mathematische Begründung der Volkswirschaftslehre*, Leipzig.

LEVITAN R., SHUBIK M. [1972], « Price Duopoly and Capacity Constraints », *International Economic Review*, 13, p. 111-122.

LOGAN J. W., LUTTER R. W. [1989], « Guaranteed Lowest Prices : Do they Facilitate Collusion ? », *Economics Letters*, 31, p. 189-192.

MAGNAN DE BORNIER J. [1991], « The " Cournot-Bertrand Debate " : a Historical Perspective », à paraître dans *History of Political Economy*.

MARKHAM J. W. [1951], « The Nature and Significance of Price Leadership », *American Economic Review*, 41, p. 891-905.

MILGROM P., ROBERTS J. [1990], « Rationalizability Learning and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities », *Econometrica*, 58, p. 1255-1277.

NOVSHEK W. [1985], « On the Existence of Cournot Equilibrium », *Review of Economic Studies*, 52, p. 85-98.

SALANT D. J. [1986], « Equilibrium in a Spatial Model of Imperfect Competition with Sequential Choice of Locations and Quantities », *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*, 19, p. 685-700.

SALOP S. C. [1985], « Practices that (Credibly) Facilitate Oligopoly Coordination » dans STIGLITZ J. E., MATHEWSON G. F., eds., *New Developments in Market Structure*, Cambridge, Cambridge University Press.

SINGH N., VIVES X. [1984], « Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly », *Rand Journal of Economics*, 15, p. 546-554.

SONNENSCHEIN H. [1968], « The Dual of Duopoly is Complementary Monopoly : or, Two of Cournot's Theories are One », *Journal of Political Economy*, 76, p. 316-318.

STIGLER G. [1947], « Kinky Oligopoly Demand Curve and Rigid Prices », *Journal of Political Economy*, 55, p. 432-449.

SWEEZY P. M. [1939], « Demand under Conditions of Oligopoly », *Journal of Political Economy*, 47, p. 568-573.

TARSKI A. [1955], « A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and its Applications », *Pacific Journal of Mathematics*, 5, p. 285-309.

TOPKIS D. M. [1979], « Equilibrium Points in Nonzero-sum *n*-Person Submodular Games », *Siam Journal of Control and Optimization*, 17, p. 773-787.

VIVES X. [1990], « Nash Equilibrium with Strategic Complementarities », *Journal of Mathematical Economics*, 19, p. 305-321.